

CHAPITRE 14

ECHANTILLONNAGE

1. Échantillon

CHAPITRE 14 ECHANTILLONNAGE

1. Notion d'échantillon

Définition

Soit n un entier naturel non nul. On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante (c'est-à-dire que la probabilité de chaque issue ne dépend pas des résultats précédemment obtenus). *→ Tirage AVEC remise*
Un échantillon de taille n est constitué des résultats obtenus par n répétitions de cette expérience aléatoire.

Exemple : "On lance une pièce de monnaie et on note le résultat"

↳ *Expérience aléatoire*

Exemple : "On lance une pièce de monnaie
et on note le résultat"

↳ Expérience aléatoire

On répète l'expérience 7 fois.

1° Il y a deux issues à chaque
expérience : P (Pile)

F (Face)

2° (F; F; P; F; P; P; P) → Echantillon de
taille 7

Exercice

L'étiquetage d'un sac de 100 kg de café précise qu'il contient 30 % de robusta et 70 % d'arabica. On prélève dans ce sac une poignée de 153 grains de café et on obtient 45 grains de robusta.



1. Indiquer la population étudiée, le caractère étudié, sa proportion théorique et la taille de l'échantillon.



1. Indiquer la population étudiée, le caractère étudié, sa proportion théorique et la taille de l'échantillon.

Population étudiée : grains de café.

Caractère étudié : Espèce (robusta ou arabica)
Qualitatif → Robusta ou non

Proportion théorique : 0,3 ou 30%

Taille de l'échantillon : 153

deux issues
(voir poignée)

2. Calculer la fréquence du caractère dans cet échantillon. (proportion observée)

2. Calculer la fréquence du caractère dans cet échantillon. (Proportion observée)

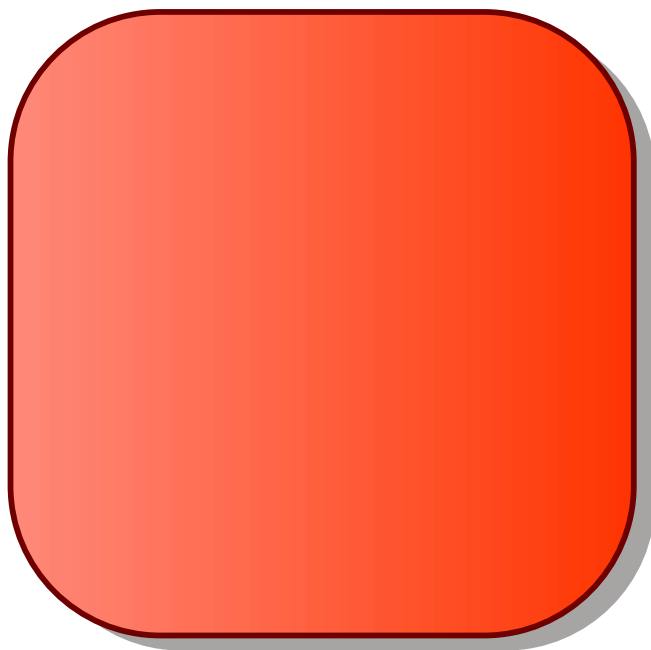
$$f = \frac{45}{153} \approx 0,29$$

$\approx 30\%$

Il y a $\approx 29\%$ de robots dans la poignée : on est proche des 30% théorique.

NOTION_ECHANTILLON2

NOTION_ECHANTILLON3



Exemple

On lance 100 fois deux dés équilibrés et on regarde si on obtient un double 6 ou non.

2 issues
→ • oui (double 6)
• Non

On répète 1 000 fois cette expérience.

1. Combien d'échantillons a-t-on constitués ? 1000
2. Quelle est la taille de ces échantillons ? 100

Deux issues : $\{0, N\}$ pour chaque
lancer des deux dés → Expérience aléatoire

Répétition 100 fois → échantillon de taille 100
→ 1000 échantillons

Exercice 1

1 échantillon

On lance 4000 fois une pièce équilibrée et on regarde si on obtient « Pile » ou « Face ». On répète 200 fois cette expérience.

1. Combien d'échantillons a-t-on constitués?

Réponse:

2. Quelle est la taille de ces échantillons?

Réponse:

NOTION_ECHANTILLON1

2. Influence de la taille de l'échantillon

Propriété (admise)

On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante. Soit p la probabilité d'une issue ω . Soit n un entier naturel non nul. On considère un échantillon de taille n et on note f la fréquence de l'issue ω dans cet échantillon. Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée f est proche de la probabilité p .

Exemple On jette une pièce \rightarrow P ou F
 $p = \text{probabilité de Pile} = \frac{1}{2}$ (proportion théorique)
P P P F $\rightarrow \frac{3}{4} = 0,75$
 $\underbrace{P \dots P}_{10\ 000}$ F \rightarrow proche de 0,5

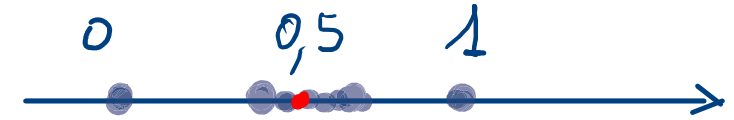
fréquence p
(proportion observée)

2. Principe de l'estimation

1. Fluctuation d'échantillonnage

2. Principe de l'estimation

1. Fluctuation d'échantillonnage



Propriété (admise)

On considère une expérience aléatoire à deux issues, que l'on peut répéter de manière indépendante et dont on connaît la probabilité p d'une issue ω .

ω : "Oméga"

On constitue un grand nombre d'échantillons de taille n sur lesquels on observe la fréquence f de réalisation de l'issue ω .

Plus la taille n des échantillons est grande, moins il y a de fluctuation de la fréquence observée f autour de la valeur de p .

Les "écarts" entre échantillons sont faibles si n est grand.

2. Principe de l'estimation

1. Fluctuation d'échantillonnage



Exemple

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie et on mesure la fréquence des piles

On répète l'expérience

Echantillon 1: P P F P P F F F P P : $\frac{6}{10} = 0,6$

Echantillon 2: F F P F P F F F P P : $\frac{3}{10} = 0,3$

...

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie
et on mesure la fréquence des piles

On répète l'expérience

Echantillon 1: P P F P P F F F P P : $\frac{6}{10} = 0,6$

Echantillon 2: F F P F P F F F P P : $\frac{3}{10} = 0,3$

...

On a une fluctuation d'échantillonnage.

Propriété: Mais cette fluctuation reste proche
de $\frac{5}{10} (= 0,5)$

On répète l'expérience!

Echantillon 1: P P F P P F F F P P : $\frac{6}{10} = 0,6$

Echantillon 2: F F P F P F F F P P : $\frac{3}{10} = 0,3$

...

On a une fluctuation d'échantillonnage.

Propriété: Mais cette fluctuation reste proche de $\frac{5}{10} (= 0,5)$

2. Estimation d'une proportion

Définition Dans une population, la proportion théorique d'un caractère étudié est noté p .

On prend un échantillon de taille n dans cette population: Il y a 95% de chances que la proportion observée dans l'échantillon soit dans l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ appelé intervalle de fluctuation n grand, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ petit

Propriété

Plus la taille de l'échantillon est grande moins la fluctuation sera grande

observée dans l'échantillon soit dans l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$
appelé intervalle de fluctuation
 n grand, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ petit

Propriété

Plus la taille de l'échantillon est grande
moins la fluctuation sera grande

Exercice

**Dans une grande surface, on estime qu'environ
40 % des clients achètent au moins un produit en
promotion.**

Exercice

Dans une grande surface, on estime qu'environ 40 % des clients achètent au moins un produit en promotion.

Un jour, le gérant observe 100 clients choisis au hasard et constate que 32 clients ont acheté un produit en promotion.

Peut-on considérer que la proportion de clients achetant des produits en promotions dans cette grande surface est conforme à ce qui est attendu?

Dans une grande surface, on estime qu'environ 40 % des clients achètent au moins un produit en promotion.

Un jour, le gérant observe 100 clients choisis au hasard et constate que 32 clients ont acheté un produit en promotion.

Peut-on considérer que la proportion de clients achetant des produits en promotions dans cette grande surface est conforme à ce qui est attendu?

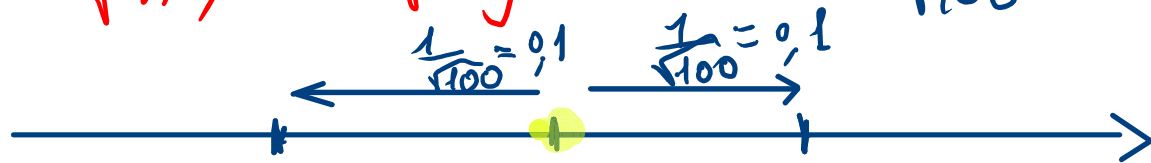
① Vocabulaire :

- Échantillon : taille $n = 100$
- Proportion théorique ou attendue : $p = 0,4$
- Proportion observée ou fréquence : $f = \frac{32}{100} = 0,32$

① Vocabulaire :

- Échantillon : taille $n = 100$
- Proportion théorique ou attendue : $p = 0,4$
- Proportion observée ou fréquence : $f = \frac{32}{100} = 0,32$
- Intervalle de fluctuation :

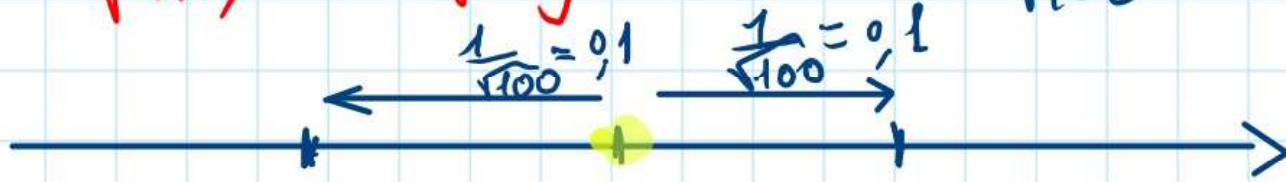
$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,4 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right]$$



$$0,4 = [0,3 ; 0,5]$$

• Intervalle de fluctuation :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,4 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right]$$



0,4

$$= [0,3 ; 0,5]$$

Conclusion

$$0,32 \in [0,3 ; 0,5]$$

C'est conforme au résultat attendu.

INTERVALLE_FLUCTUATION1
INTERVALLE_FLUCTUATION2