CHAPITRE 6: PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

① Primitives

Définition Primitive d'une fonction

une fonction F est une primitive de f sur I lorsque, pour tout x de I, on a $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, shift left, "\text{dérivée}"] & f \arrow[l, shift left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd}$$

Exemples:

a) $F(x) = 2x$ est une primitive de $f(x) =$

$$\xrightarrow{\text{dérivée}}$$

$$\xleftarrow[\text{primitive}]{}$$

Exemples:

a) $F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x$

$$\begin{tikzcd} F & f \\ x^2 \arrow[r, shift left, "\text{dérivée}"] & 2x \arrow[l, shift left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd}$$

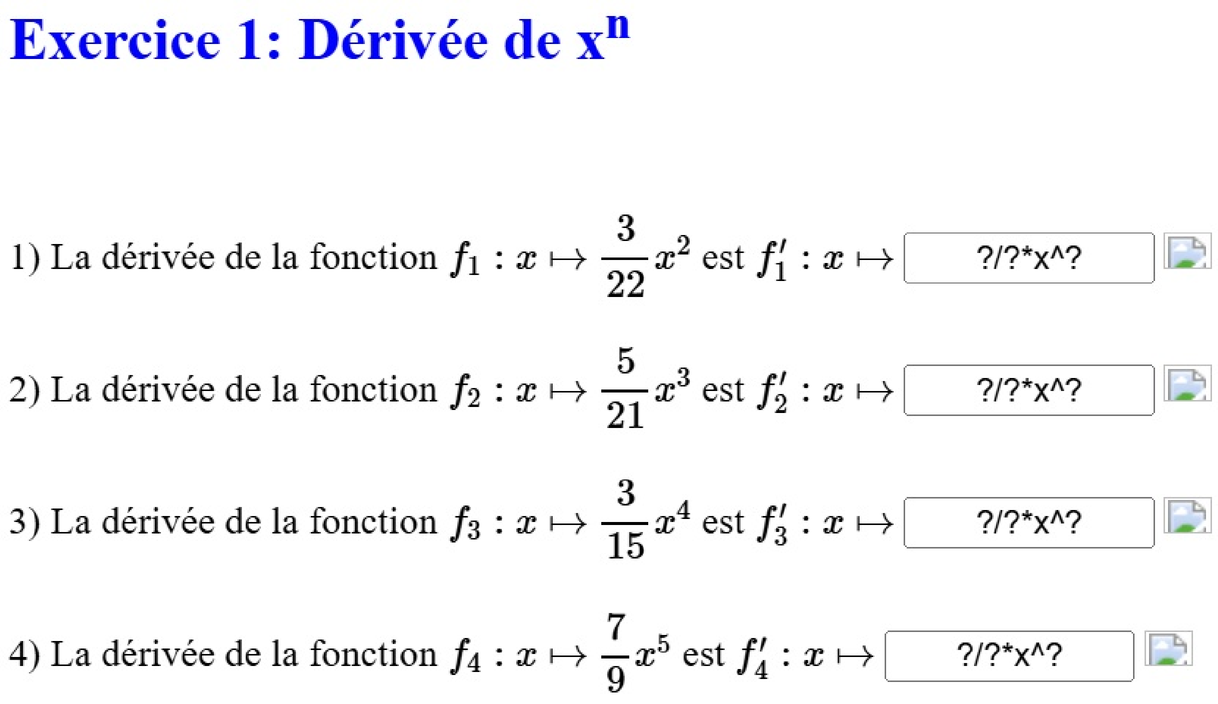
$(x^n)' = n x^{n-1}$

b) $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$

$$\begin{tikzcd} F & f \\ x^3 \arrow[r, shift left, "\text{dérivée}"] & 3x^2 \arrow[l, shift left, "\text{primitive}"] \end{tikzcd}$$

Exercice 1: Dérivée de x^n

PRIMITIVE_FCT_REFERENCES1



Exercice 1: Dérivée de x^n

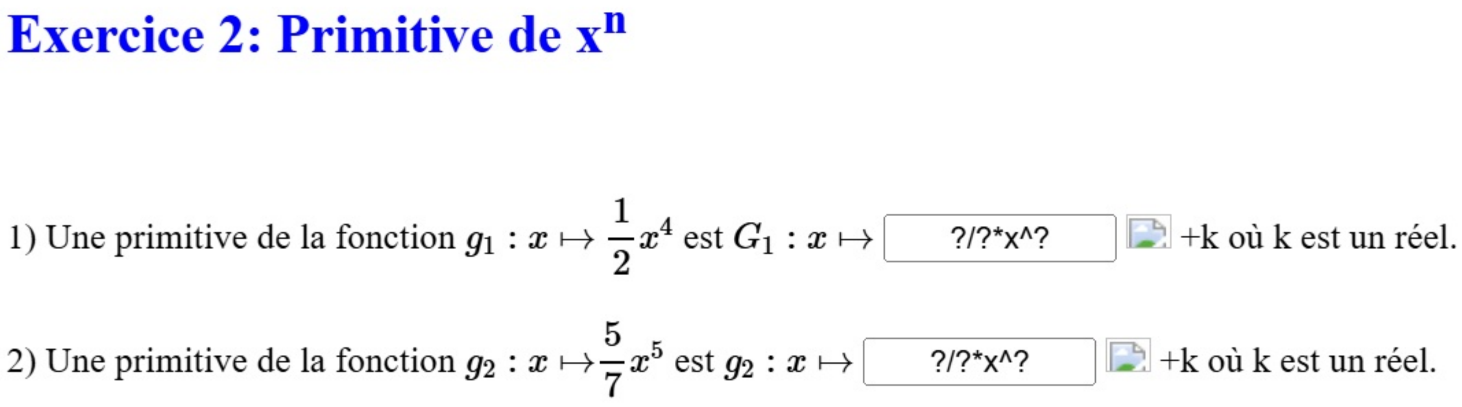
1) La dérivée de la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{3}{22}x^2$ est $f_1' : x \mapsto$?/?*x^?

2) La dérivée de la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{5}{21}x^3$ est $f_2' : x \mapsto$?/?*x^?

3) La dérivée de la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{3}{15}x^4$ est $f_3' : x \mapsto$?/?*x^?

4) La dérivée de la fonction $f_4 : x \mapsto \frac{7}{9}x^5$ est $f_4' : x \mapsto$?/?*x^?

Exercice 2: Primitive de x^n



Exercice 2: Primitive de x^n

1) Une primitive de la fonction $g_1 : x \mapsto \frac{1}{2}x^4$ est $G_1 : x \mapsto$?/?*x^? +k où k est un réel.

2) Une primitive de la fonction $g_2 : x \mapsto \frac{5}{7}x^5$ est $g_2 : x \mapsto$?/?*x^? +k où k est un réel.

PRIMITIVE_FCT_REFERENCES1

Exercice 3

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

1) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{7}{25}x^5$. La dérivée de f est: 7/5*x^4

$$\left(\frac{7}{25}x^5\right)' = \boxed{\frac{7}{25}\times 5}\,x^4 = \frac{7}{5}x^4$$

2) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{5}{3}x^2$. Une primitive de f est: 5/9*x^3

$$(x^3)' = 3x^2 \qquad \times\boxed{\frac{1}{3}\times\frac{5}{3}} \qquad \times\frac{5}{9}$$

$$\times\frac{5}{9} \qquad \left(\frac{5}{9}x^3\right)' = \frac{5}{3}x^2$$

PRIMITIVE_FCT_REFERENCES1a
PRIMITIVE_FCT_REFERENCES1b

Rappel :

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exemples :

$$(e^{4x+3})' = \overset{u'}{\boxed{4}} \times e^{\overset{u}{\boxed{4x+3}}}$$

$u(x) = 4x+3$ donc $u'(x) = 4$

$$(e^{x^2+1})' = \overset{u'}{\boxed{2x}} e^{\overset{u}{\boxed{x^2+1}}}$$

$u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$

Exemples :

$$\left(e^{4x+3}\right)' = \overset{u'}{\boxed{4}} \times e^{\overset{u}{\boxed{4x+3}}}$$

$u(x) = 4x+3$ donc $u'(x) = 4$

$$\left(e^{x^2+1}\right)' = \overset{u'}{\boxed{2x}}\, e^{\overset{u}{\boxed{x^2+1}}}$$

$u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$

Exercice 4 : exponentielle

On cherche des primitives .

① $f(x) = \dfrac{-35}{11}\, e^{-5x+4}$

$$\left(e^{x^2+1}\right)' = \overset{u'}{\boxed{2x}}\, e^{\overset{u}{\boxed{x^2+1}}}$$

$u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$

Exercice 4 : exponentielle

On cherche des primitives.

① $f(x) = \dfrac{-35}{11} \boxed{e^{-5x+4}}$

$$\left(e^{-5x+4}\right)' = u' e^{u}$$

$$= -5\, e^{-5x+4}$$

e^{u} avec $u(x) = -5x+4$

$u'(x) = -5$

① $f(x) = \frac{-35}{11} \boxed{e^{-5x+4}}$

$$\left(e^{-5x+4}\right)' = u' e^{u}$$

$$= \boxed{-5}\, e^{-5x+4}$$

e^{u} avec $u(x) = -5x+4$

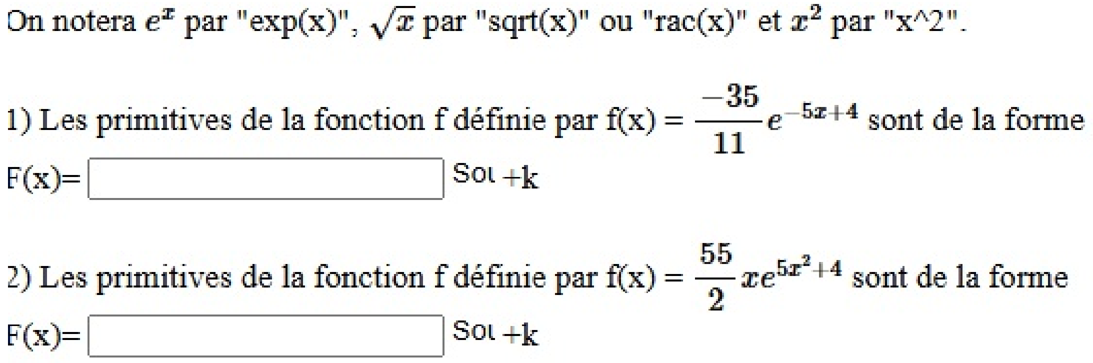
$u'(x) = -5$

$\times\left(\frac{1}{-5} \times \frac{-35}{11}\right) = \times \frac{7}{11}$

$\times \frac{7}{11}$

$$\left(\frac{7}{11} e^{-5x+4}\right)' = \boxed{\frac{-35}{11}}\, e^{-5x+4}$$

$$\boxed{7/11 * exp(-5x+4)}$$



On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{-35}{11}e^{-5x+4}$ sont de la forme

F(x)= Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{55}{2}xe^{5x^2+4}$ sont de la forme

F(x)= Sol +k

$$\left(e^{-5x+4}\right)' = u' e^{u}$$

e^{u} avec $u(x) = -5x+4$

$u'(x) = -5$

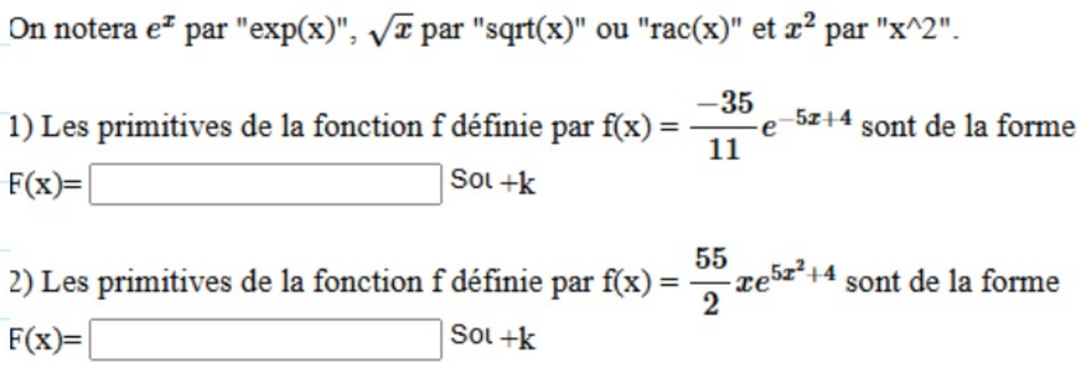
$$= \boxed{-5}\, e^{-5x+4}$$

$\times \frac{7}{11}$

$$\left(\frac{7}{11} e^{-5x+4}\right)' = \boxed{\frac{-35}{11}}\, e^{-5x+4}$$

$\times \left(\frac{1}{-5} \times \frac{-35}{11}\right) = \times \frac{7}{11}$

$$\boxed{-35/11 * exp(-5x+4)}$$



On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{-35}{11}e^{-5x+4}$ sont de la forme

F(x)= ☐ Sol +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{55}{2}xe^{5x^2+4}$ sont de la forme

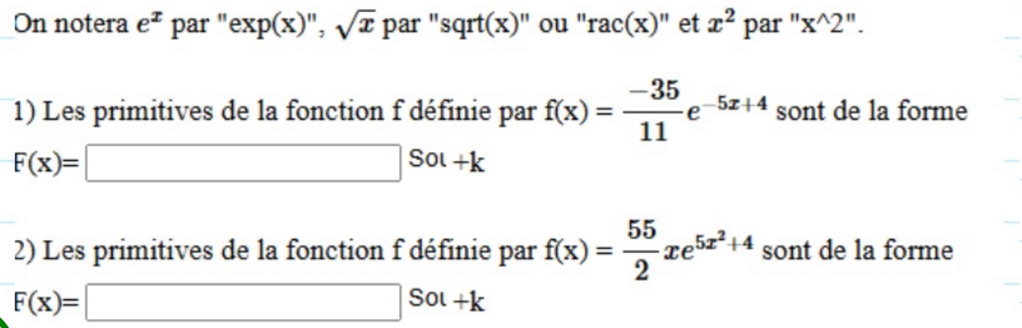
F(x)= ☐ Sol +k

② $f(x) = \frac{55}{2} x e^{5x^2+4}$

$\frac{1}{11}$ $= (-5)\, e$

$$\left(\frac{7}{11} e^{-5x+4}\right)' = \frac{-35}{11} e^{-5x+4}$$

$\times \left(\frac{1}{-5} \times \frac{-35}{11}\right) = \times \frac{7}{11}$



On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{-35}{11}e^{-5x+4}$ sont de la forme

F(x)= ☐ Soι +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{55}{2}xe^{5x^2+4}$ sont de la forme

F(x)= ☐ Soι +k

$$\boxed{\cancel{-35}\,7/11 * \exp(-5x+4)}$$

② $f(x) = \frac{55}{2}\, x\, e^{5x^2+4}$

$$\left(e^{5x^2+4}\right)' = u' e^{u}$$

avec $u(x) = 5x^2 + 4$

donc $u'(x) = 10x$

$$= 10x\, e^{5x^2+4}$$

$\times \frac{11}{4}$

$$\left(\frac{11}{4} e^{5x^2+4}\right)' = \frac{55}{2}\, x\, e^{5x^2+4}$$

$\times \frac{1}{10} \times \frac{55}{2} = \times \frac{11}{4}$

② $f(x) = \frac{55}{2} x e^{5x^2+4}$

$$\left(e^{5x^2+4}\right)' = u' e^{u}$$

avec $u(x) = 5x^2 + 4$

donc $u'(x) = 10x$

$$= 10 x e^{5x^2+4}$$

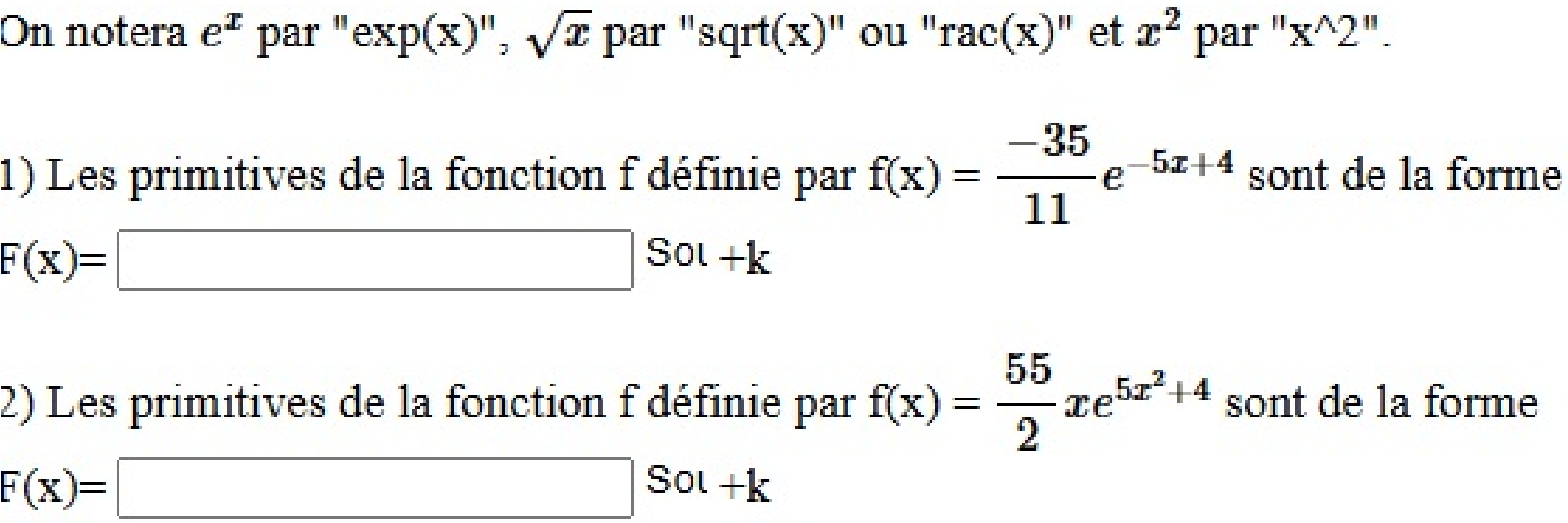
$\times \frac{11}{4}$

$$\left(\frac{11}{4} e^{5x^2+4}\right)' = \frac{55}{2} x e^{5x^2+4}$$

$\times \frac{1}{10} \times \frac{55}{2} = \times \frac{11}{4}$

$$\boxed{11/4 * exp(5x^2+4)}$$

PRIMITIVES_EXP1
PRIMITIVES_EXP1a



On notera e^x par "exp(x)", $\sqrt{x}$ par "sqrt(x)" ou "rac(x)" et x^2 par "x^2".

1) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{-35}{11}e^{-5x+4}$ sont de la forme

F(x)= Sou +k

2) Les primitives de la fonction f définie par f(x) = $\frac{55}{2}xe^{5x^2+4}$ sont de la forme

F(x)= Sou +k

$$f(x) = \left(\frac{75}{4}x + \frac{75}{8}\right)e^{3x^2+3x}$$

$$\left(e^{3x^2+3x}\right)' = (6x+3)\,e^{3x^2+3x}$$

$\times \frac{25}{8}$

$\times \boxed{\frac{1}{8} \times 25}$

$$\left(\frac{25}{8}e^{3x^2+3x}\right)' = \left(\frac{150}{8}x + \frac{75}{8}\right)e^{3x^2+3x}$$

Exercice 5: primitive de u^n

Cours : $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

Exemple : $\left[\left(3x + \frac{1}{2}\right)^4\right]' = \left[u^n\right]' = n \times u' \times u^{n-1}$

avec $u(x) = 3x + \frac{1}{2}$ et $n = 4$

$u'(x) = 3$

$$\left[\left(3x + \frac{1}{2}\right)^4\right]' = \overset{n}{\textcircled{4}} \times \overset{u'}{\textcircled{3}} \times \left(\overset{u}{\textcircled{$3x + \frac{1}{2}$}}\right)^{\overset{n-1}{\textcircled{3}}}$$

$$= \boxed{12\left(3x + \frac{1}{2}\right)^3}$$

① Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto 9\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$.

On cherche une primitive de f.

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^6\right]' = 6 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$$

$u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

$u'(x) = \frac{1}{2}$

$$= 3\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$$

×3

×3

$$\left[\boxed{3\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^6}\right]' = 9\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$$

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto 9\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$.

PRIMITIVE_PUISSANCE0
PRIMITIVE_PUISSANCE0a
PRIMITIVE_PUISSANCE0b

On cherche une primitive de f. $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$

$$\left[\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^6\right]' = 6 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$$

$u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

$u'(x) = \frac{1}{2}$

$$= 3\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$$

$\times 3$ $\times 3$

$$\left[\boxed{3\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^6}\right]' = 9\left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^5$$

②

$$f(x) = 8\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^5$$

$$\left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^6\right]' = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^5$$

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto 8\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^5$.

②

$$f(x) = 8\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^5$$

$$\left[\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^6\right]' = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^5$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^5$$

$\times 4$

$$\left[4\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^6\right]' = 8\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}\right)^5$$

Exercice 6: racine

Cours :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple :

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)' = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) = 2x+1 \\ u'(x) = 2 \end{array}}$$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)' = \frac{\cancel{2}\ 1}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Cours : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemple : $\left(\sqrt{2x+1}\right)' = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) = 2x+1 \\ u'(x) = 2 \end{array}}$$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)' = \frac{\cancel{2}\times 1}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f(x) = \frac{6}{5\sqrt{4x-4}}$$

$u(x) = 4x-4$

$u'(x) = 4$

$$\left[\sqrt{4x-4}\right]' = \frac{\cancel{4}\;\cancel{2}\times 2}{\cancel{2}\sqrt{4x-4}}$$

$\times \frac{3}{5}$

$$\left[\frac{3}{5}\sqrt{4x-4}\right]' = \frac{6}{5\sqrt{4x-4}}$$

Exercice

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Soit $g(x) = \dfrac{3}{5\sqrt{2x+4}}$

$u(x) = 2x + 4$

$u'(x) = 2$

$$\left(\sqrt{2x+4}\right)' = \frac{\cancel{2}\ ①}{\cancel{2}\sqrt{2x+4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+4}} \quad \times \frac{3}{5}$$

$$\left(\overbrace{\frac{3}{5}\sqrt{2x+4}}^{\text{Primitive de } g}\right)' = \frac{3}{5\sqrt{2x+4}}$$

PRIMITIVES_RACINES1
PRIMITIVES_RACINES1a

Théorème Ensemble des primitives et conditions initiales

$f(x) = 3x^4$

$(x^5)' = 5x^4 \Big) \times \frac{3}{5}$

$\left(\frac{3}{5}x^5\right)' = 3x^4$

$F(x) = \frac{3}{5}x^5$

F est une primitive de f car $F' = f$

$F_1(x) = \frac{3}{5}x^5 + 2$, $F_1'(x) = \frac{3}{\cancel{5}} \times \cancel{5}x^4 + 0 = 3x^4$

donc $\underline{F_1(x) \text{ est une autre primitive}}$ de f

$F_n(x) = \frac{3}{5}x^5 + n$ avec $n \in \mathbb{R}$

F est une primitive de f car $F' = f$

$F_1(x) = \frac{3}{5}x^5 + 2$, $F_1'(x) = \frac{3}{\cancel{5}} \times \cancel{5}x^4 + 0 = 3x^4$

donc $F_1(x)$ est une autre primitive de f

$F_k(x) = \frac{3}{5}x^5 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

sont toutes les primitives de f

$F_1(x) = \frac{3}{5}x^5 + 2$, $F_1'(x) = \frac{3}{\cancel{5}} \times \cancel{5}x^4 + 0 = 3x^4$

donc $F_1(x)$ est une autre primitive de f

$$\boxed{F_r(x) = \frac{3}{5}x^5 + r \quad \text{avec } r \in \mathbb{R} \quad \text{sont toutes les primitives de } f}$$

Exercice Soit $f(x) = \frac{12}{5}x^3$

Je veux trouver **LA** primitive de f telle que $F(2) = \frac{63}{5}$

$$\boxed{\begin{array}{c} F_r(x) = \frac{3}{5}x^5 + r \quad \text{avec } r \in \mathbb{R} \\ \text{sont toutes les primitives de } f \end{array}}$$

Exercice Soit $f(x) = \frac{12}{5}x^3$

Je veux trouver LA primitive de f telle que

$F(2) = \frac{63}{5}$

$$(x^4)' = 4x^3$$

$$\left(\frac{3}{5}x^4\right)' = \frac{12}{5}x^3$$

$\times \frac{3}{5}$

Exercice Soit $f(x) = \frac{12}{5}x^3$

Je veux trouver LA primitive de f telle que $F(2) = \frac{63}{5}$

$$(x^4)' = 4x^3 \quad \times\frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{3}{5}x^4\right)' = \frac{12}{5}x^3$$

$F_r(x) = \frac{3}{5}x^4 + r$ sont toutes les primitives

on cherche r pour que $f(2) = \frac{63}{5}$

$$\frac{3}{5}2^4 + r = \frac{63}{5}$$

$$(x^4)' = 4x^3 \quad \Big\downarrow \times \frac{3}{5}$$

$$\left(\frac{3}{5}x^4\right)' = \frac{12}{5}x^3$$

$F_r(x) = \frac{3}{5}x^4 + r$ sont toutes les primitives

on cherche r pour que $f(2) = \frac{63}{5}$

$$\frac{3}{5}2^4 + r = \frac{63}{5}$$

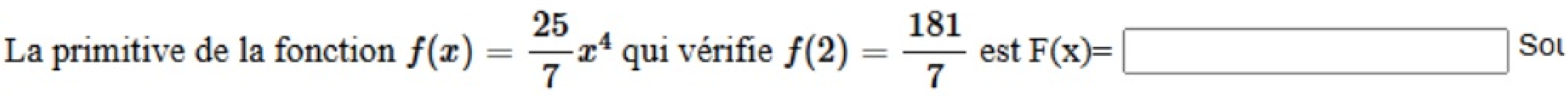
$$\frac{3}{5} \times \frac{16}{1} + r = \frac{63}{5}$$

$$\frac{48}{5} + r = \frac{63}{5}$$

$$r = \frac{63}{5} - \frac{48}{5} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$$

$$\boxed{F_3(x) = \frac{3}{5}x^4 + 3}$$

Exercice


La primitive de la fonction $f(x) = \frac{25}{7}x^4$ qui vérifie $f(2) = \frac{181}{7}$ est F(x)= Sou

① Primitive

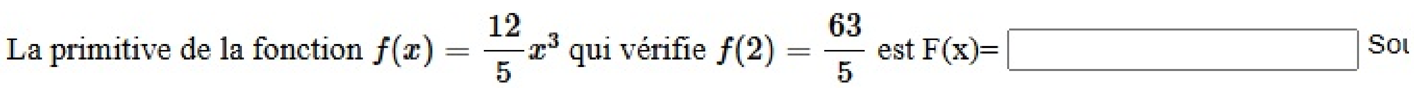
$$(x^5)' = 5x^4$$

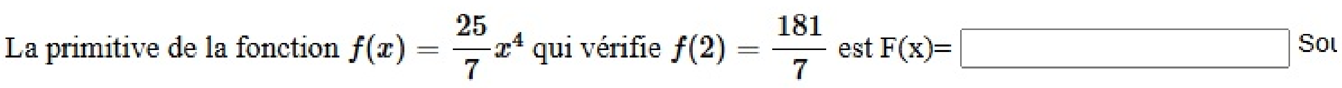
$$\left(\frac{5}{7}x^5\right) = \frac{25}{7}x^4$$

$\times \frac{5}{7}$

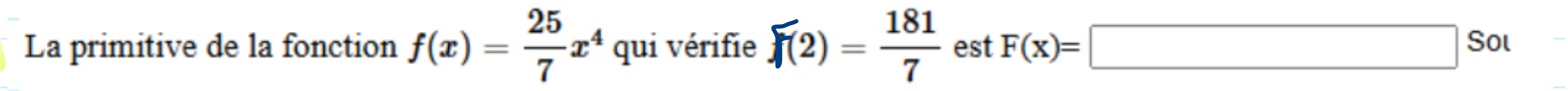
$\times 5 \times \frac{1}{7}$

Exercice


La primitive de la fonction $f(x) = \frac{12}{5}x^3$ qui vérifie $f(2) = \frac{63}{5}$ est F(x)= Sou


La primitive de la fonction $f(x) = \frac{25}{7}x^4$ qui vérifie $f(2) = \frac{181}{7}$ est F(x)= Sou

PRIMITIVE_COND_INI1
PRIMITIVE_COND_INI2



La primitive de la fonction $f(x) = \frac{25}{7}x^4$ qui vérifie $F(2) = \frac{181}{7}$ est F(x)= ☐ Sou

① Primitive

$$(x^5)' = 5x^4 \quad \times \frac{5}{7} \qquad \times 5 \times \frac{1}{7}$$

$$\left(\frac{5}{7}x^5\right)' = \frac{25}{7}x^4$$

Les primitives sont les fonctions

$$F_k(x) = \frac{5}{7}x^5 + k$$, k nombre réel

② Trouver k pour que $f(2) = \frac{181}{7}$

$$(x^5)' = 5x^4$$

$$\left(\frac{5}{7}x^5\right) = \frac{25}{7}x^4 \quad \times \frac{5}{7} \qquad \times\, 5 \times \frac{1}{7}$$

Les primitives sont les fonctions

$$F_k(x) = \frac{5}{7}x^5 + k$$

, k nombre réel

② Trouver k pour que $F(2) = \frac{181}{7}$

$$F(2) = \frac{181}{7}$$

$$\frac{5}{7} \times 2^5 + k = \frac{181}{7}$$

$$k = \frac{181}{7} - \frac{5}{7} \times 2^5 = 3$$

$$\boxed{F(x) = 5/7 * x\hat{\ }5 + 3}$$

Equation algébrique

$2x+1=0$ **Déterminer le réel x**

Equation fonctionnelle

$3f=5-f$ **Déterminer la fonction f**

Equation différentielle

$f ' + f = 5$ **Déterminer la fonction f**

Equation fonctionnelle

$3f=5-f$ **Déterminer la fonction f**

Equation différentielle

$f' + f = 5$ **Déterminer la fonction f**

On notera $f = y$

Equation différentielle

$f = y$

$f' + f = 5$ **Déterminer la fonction f**

Exemples: $(e^x)' = e^x$

$f : x \longmapsto e^x$

(E1) $\boxed{f' = f}$

f est solution de l'équa diff (E1)

$g : x \longmapsto e^x + 3$

$g'(x) = e^x$

(E2) $\boxed{g' + 3 = g}$

" "

" " (E2)

Exercice

L'équation différentielle $y' = ay$

a pour solutions $y = Ke^{ax}$

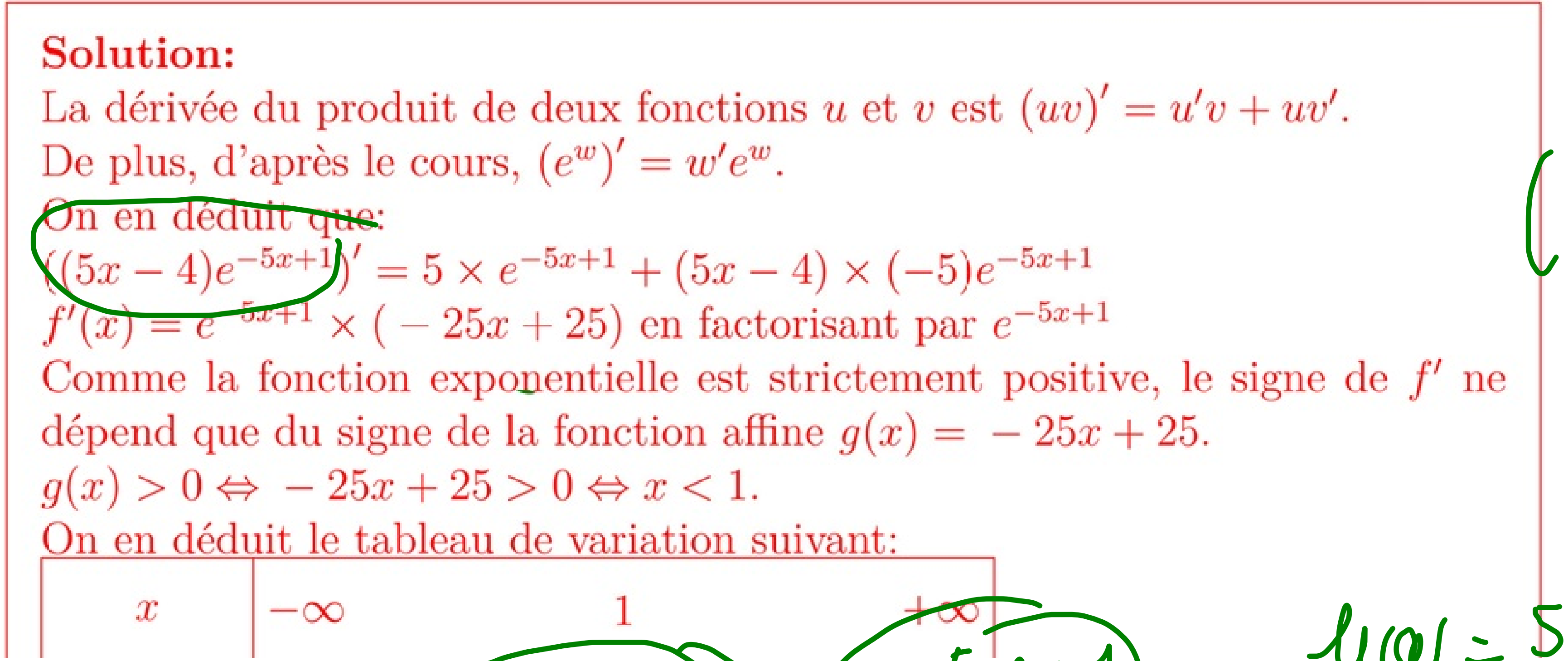
avec $K \in \mathbb{R}$.

$$(Ke^{ax})' = aKe^{ax}$$

① $3y' - 9y = 0 \iff 3y' = 9y$

$\iff y' = 3y$

$y = Ke^{3x}$ avec $K \in \mathbb{R}$



Solution:
La dérivée du produit de deux fonctions u et v est $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, d'après le cours, $(e^w)' = w'e^w$.
On en déduit que:
$((5x-4)e^{-5x+1})' = 5 \times e^{-5x+1} + (5x-4) \times (-5)e^{-5x+1}$
$f'(x) = e^{-5x+1} \times (-25x+25)$ en factorisant par e^{-5x+1}
Comme la fonction exponentielle est strictement positive, le signe de f' ne dépend que du signe de la fonction affine $g(x) = -25x+25$.
$g(x) > 0 \Leftrightarrow -25x+25 > 0 \Leftrightarrow x < 1$.
On en déduit le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$	1	$+\infty$

$(e^u)' = u'e^u$

$-25x+25 \boxed{> 0}$
$-25x > -25$
$x \boxed{< 1}$

$u(x) = 5x-4 \Rightarrow u'(x) = 5$
$v(x) = e^{-5x+1} \Rightarrow -5e^{-5x+1}$

$$\underbrace{(5x-4)}_{u}\underbrace{e^{-5x+1}}_{v}$$

$$u'v+uv' = 5\times e^{-5x+1} + (5x-4)\times -5e^{-5x+1}$$
$$= (5 + (5x-4)\times(-5))\times e^{-5x+1}$$
$$= (5-25x+20)e^{-5x+1} = (-25x+25)e^{-5x+1}$$

$$(Ke^{ax})' = aKe^{ax}$$

① $3y' - 9y = 0 \iff 3y' = 9y$

$\iff y' = 3y$

$f = y = Ke^{3x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

On veut de plus $f(-1) = e^{-2}$

$$Ke^{3\times(-1)} = e^{-2}$$

$$Ke^{-3} = e^{-2}$$

$$K = \frac{e^{-2}}{e^{-3}} = e^{-2-(-3)} = e^{1}$$

$$f = y = e^{1} \times e^{3x} = \boxed{e^{3x+1}}$$

Exercice

On cherche l'unique solution de l'équation différentielle $3y' - 9y = 0$ telle que $f(-1) = e^{-2}$

$$\boxed{y' = ay \text{ a pour solutions } y = k e^{ax}}$$

$$3y' \underset{+9y}{-\,9y} = \underset{+9y}{0} \iff (3y' = 9y) \div 3$$

$$\iff y' = 3y$$

$$\boxed{y' = ay \text{ a pour solutions } y = K e^{ax}}$$

$$3y' \underset{+9y}{-9y} = \underset{+9y}{0} \Leftrightarrow (3y' = 9y) \div 3$$

$$\Leftrightarrow y' = 3y$$

Les solutions sont $f(x) = Ke^{3x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

On détermine K :

$$\underbrace{f(-1) = e^{-2}}_{\text{énoncé}} \Leftrightarrow Ke^{3\times(-1)} = e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow K e^{-3} = e^{-2}$$

$$3y' \underset{+9y}{-9y} = \underset{+9y}{0} \iff (3y' = 9y) \div 3$$

$$\iff y' = 3y$$

Les solutions sont $f(x) = Ke^{3x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

On détermine K :

$$\underbrace{f(-1) = e^{-2}}_{\text{énoncé}} \iff Ke^{3\times(-1)} = e^{-2}$$

$$\iff \frac{K e^{-3}}{e^{-3}} = \frac{e^{-2}}{e^{-3}} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\iff K = e^{-2-(-3)} \qquad e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\iff K = e^1$$

Conclusion :

$$f(x) = Ke^{3x} = e^1 e^{3x} = \boxed{e^{3x+1}}$$

exp (? + ?x)

exp (1 + 3x)

$$\underset{+9y}{3y' - 9y} = \underset{+9y}{0} \iff (3y' = 9y) \div 3$$

$$\iff y' = 3y$$

Les solutions sont $f(x) = Ke^{3x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

On détermine K :

$$\underbrace{f(-1) = e^{-2}}_{\text{énoncé}} \iff Ke^{3\times(-1)} = e^{-2}$$

$$\iff \frac{K e^{-3}}{e^{-3}} = \frac{e^{-2}}{e^{-3}}$$

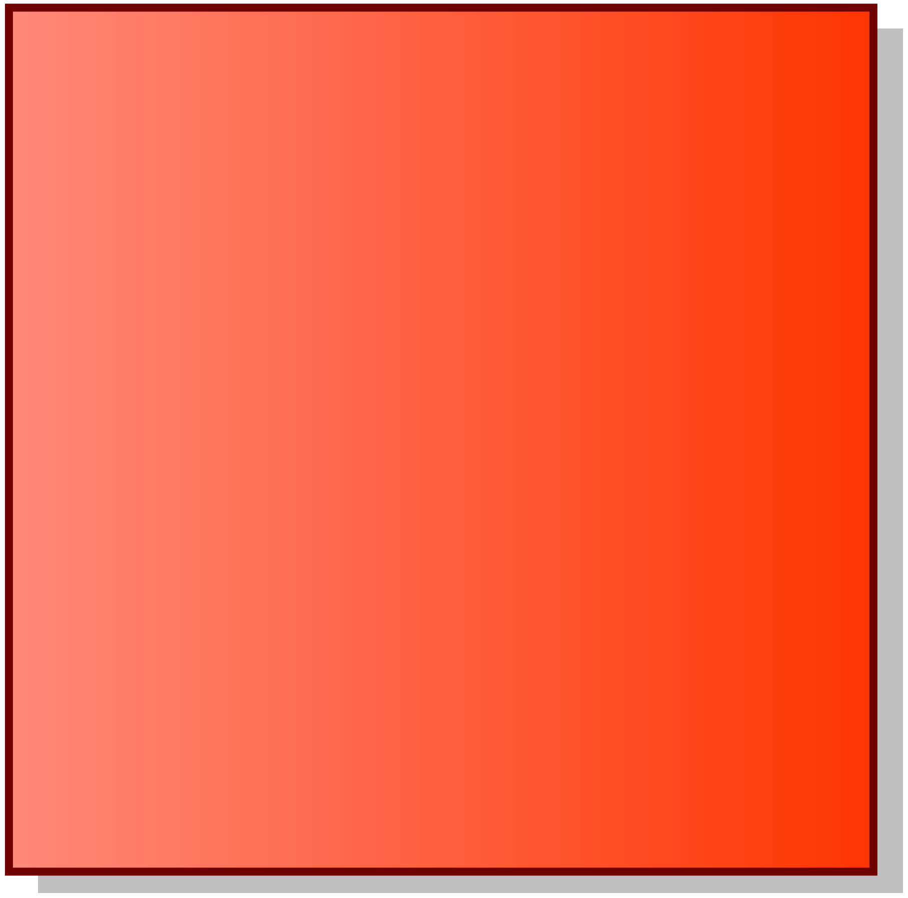
$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\iff K = e^{-2-(-3)}$$

$$\iff K = e^1$$

Conclusion : $f(x) = Ke^{3x} = e^1 e^{3x} = \boxed{e^{3x+1}}$



Propriétés Primitives de fonctions composées

Les théorèmes opératoires sur le calcul de dérivées permettent d'établir le tableau suivant sur les primitives. On considère que u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$2u'u$	u^2	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$u'e^u$	e^u	

Définition Équation différentielle

- Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'',…. et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f…).
- On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Théorème Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay$, solution avec condition initiale

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.