Chapitre 2: Lois discrètes

discret	continu.
1, 2, 3, 4 ---	[0 ; 2]

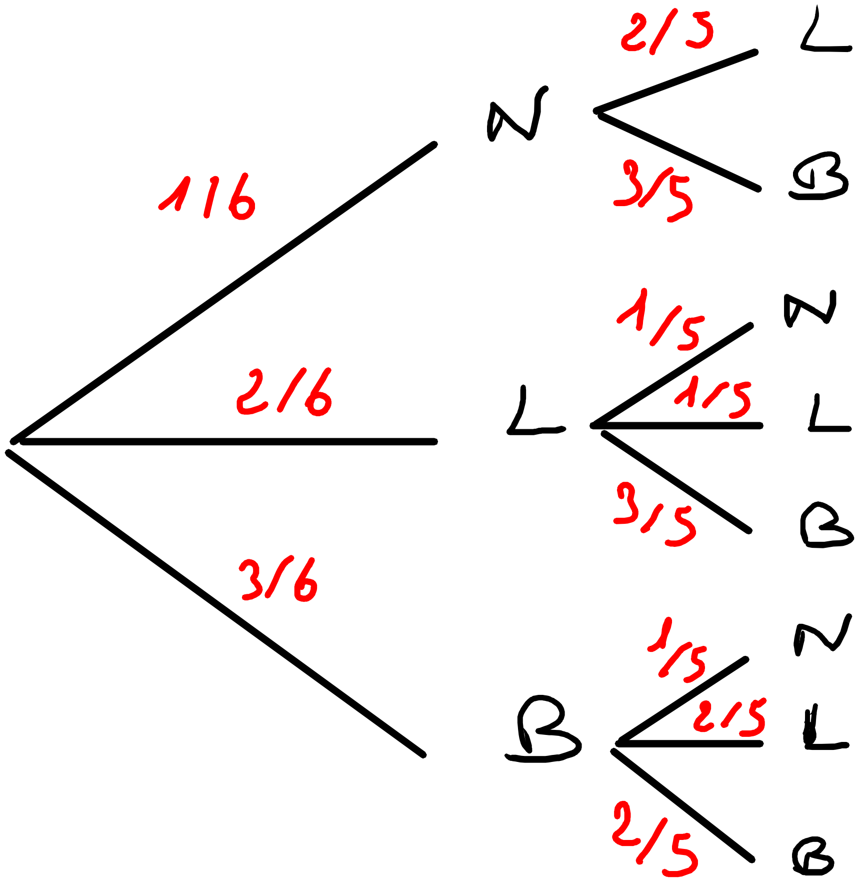
Rappel 1: Arbre de probabilité

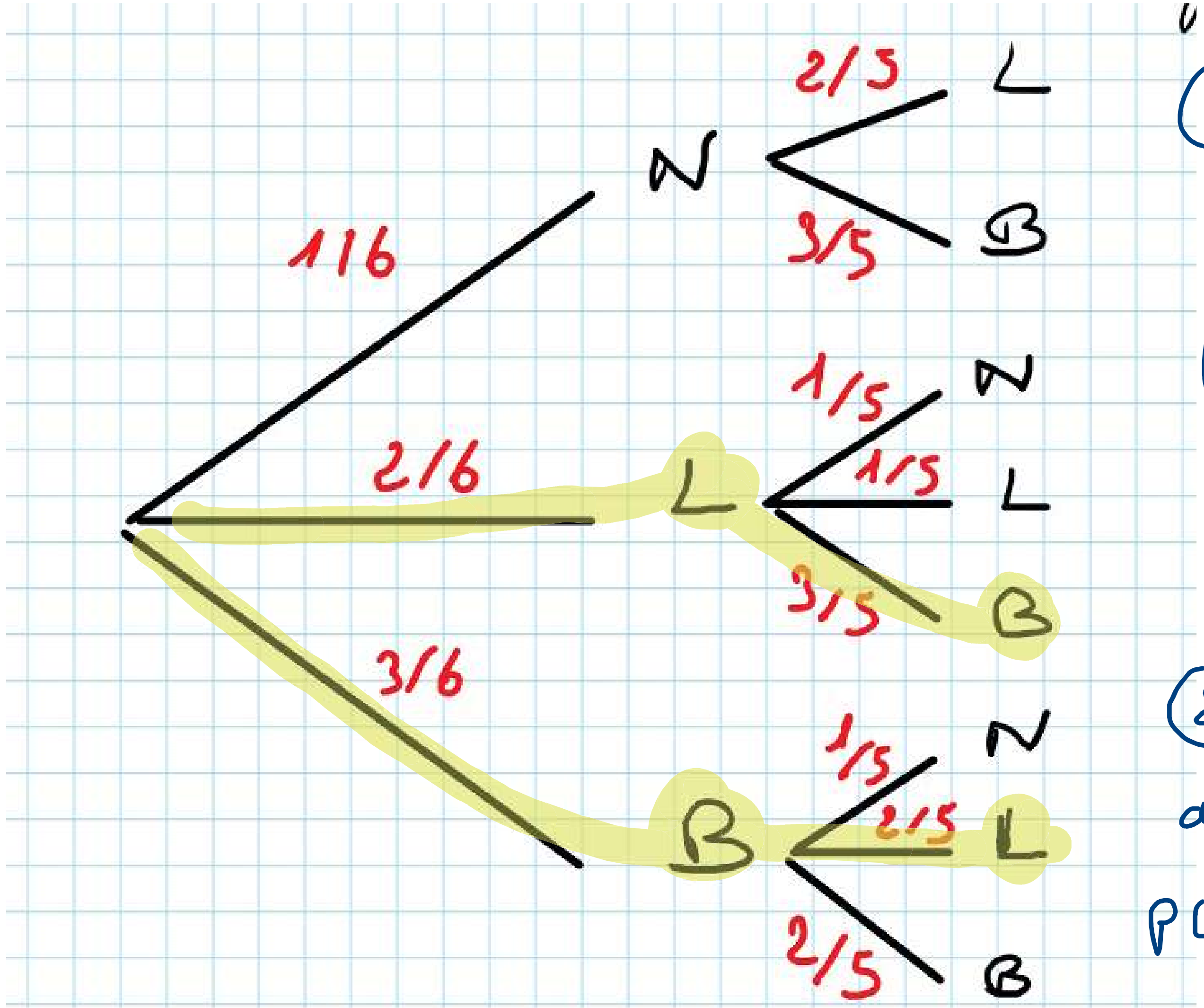
Exercice

Dans une boite de chocolat, on dispose de 1 chocolat noir, de 2 chocolats au lait et de 3 chocolats blanc.

On choisit au hasard deux chocolats.

Dresser un arbre de probabilité





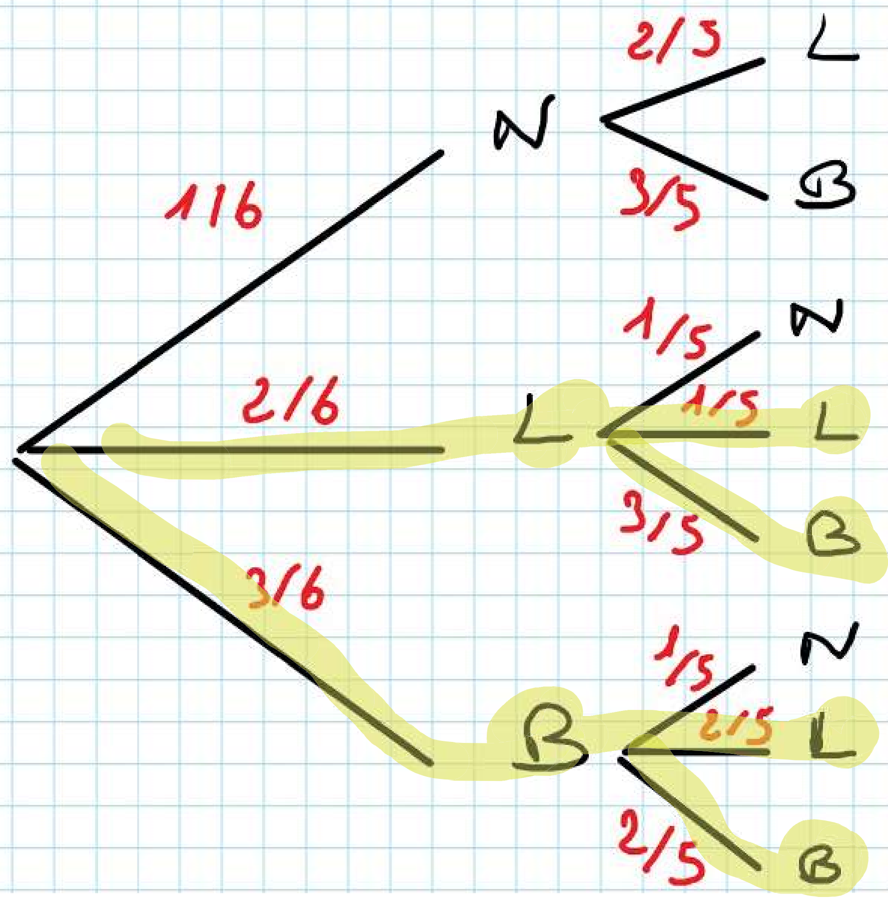
① A = " on obtient deux chocolats de même type "

$$p(A) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

② B = " On obtient un chocolat au lait ~~et~~ un chocolat blanc "

$$P(B) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$



(2) B = " On obtient un chocolat au lait ~~et~~ un chocolat blanc "

$P(B) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

(3) C = " On obtient au moins un chocolat blanc "

$P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times 1 = \dots$

(4) D = " On obtient aucun chocolat noir "

$P(D) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}$
$= \dots$

Rappel 1: Arbre de probabilité

Exercice

Dans une boite de chocolat, on dispose de 1 chocolat noirs, de 2 chocolats au lait et de 3 chocolats blanc.
Dresser sur feuille l'arbre de probabilité correspondant à cette situation puis compléter les questions suivantes:

1) La probabilité de l'évènement A="On obtient deux chocolats de même type." est égale à

2) La probabilité de l'évènement B="On obtient un chocolat blanc et un chocolat au lait." est égale à

3) La probabilité de l'évènement C="On obtient un chocolat noir et un chocolat au lait." est égale à

4) La probabilité de l'évènement D="On obtient au moins un chocolat blanc." est égale à

5) La probabilité de l'évènement E="On obtient deux chocolats de type différent." est égale à

6) La probabilité de l'évènement F="On obtient aucun chocolat blanc." est égale à

7) La probabilité de l'évènement G="On obtient un chocolat blanc et un chocolat noir." est égale à

CALCULS_PROBA1

Rappel 2: Variable aléatoire

Modéliser par une variable aléatoire

Un jeu de grattage coûtant 1 € rapporte :

- 100 € avec une probabilité 0,005,
- 20 € avec une probabilité 0,01,
- 5 € avec une probabilité 0,02,
- 1 € avec une probabilité 0,1.
- 0 € avec une probabilité 0,865.

On considère la variable aléatoire G donnant
le gain algébrique à ce jeu (en tenant compte du prix du ticket).

1. Donner la loi de probabilité de G sous forme de tableau.

2. **a)** Calculer « à la main » E(G), l'espérance de G.

(**b)** Déterminer à la calculatrice σ(G), l'écart-type de G.)

c) Ce jeu est-il équitable ?

3. Calculer $p(G \geqslant 15)$.

Modéliser par une variable aléatoire

Un jeu de grattage coûtant 1 € rapporte :

- 100 € avec une probabilité 0,005,
- 20 € avec une probabilité 0,01,
- 5 € avec une probabilité 0,02,
- 1 € avec une probabilité 0,1.
- 0 € avec une probabilité 0,865.

Loi de probabilité

Issues Gains x_i	-1	0	4	19	99
$P(X=x_i)$	$0,865$	$0,1$	$0,02$	$0,01$	$0,005$

Loi de probabilité

Issues Gains x_i	-1	0	4	19	99
$P(X=x_i)$	$0{,}865$	$0{,}1$	$0{,}02$	$0{,}01$	$0{,}005$

Espérance $E(G)$:

$$-1\times 0{,}865+0\times 0{,}1+4\times 0{,}02+19\times 0{,}01+99\times 0{,}005$$

$$=-0{,}1$$

Ce jeu est un peu équitable pour le joueur.

Issues Gains x_i	-1	0	4	19	99
$P(X=x_i)$	$0,865$	$0,1$	$0,02$	$0,01$	$0,005$

Espérance $E(G)$:

$$-1\times 0,865+0\times 0,1+4\times 0,02+19\times 0,01+99\times 0,005$$

$$=-0,1$$

Ce jeu est un peu équitable pour le joueur.

$$P(G\geq 15)=0,01+0,005=0,015$$

$$P(G\leq 10)=0,865+0,1+0,02$$

Lors d'un jeu consistant à tirer une boule dans une urne contenant 10 boules colorés dont:
- 2 rouges,
- 4 bleues,
- 4 vertes,

On mise au départ 2 euros.
Pour chaque tirage on gagne:
- On gagne 3 euros si on tire une boule rouge
- On gagne 5 euros si on tire une boule bleue
- On gagne 9 euros si on tire une boule verte

On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (on oubliera pas de déduire la mise).
1) Compléter la loi de probabilité (toutes les valeurs sont de nombres) et classera les gains par ordre croissant:

GAINS(x_i)	1 ?	3 ?	7 ?
P($X = x_i$)	0.2 ?	0.4 ?	0.4 ?

2) Donner l'espérance de X:
E(X)= 4.2 ? $= 0,2 \times 1 + 3 \times 0,4 + 7 \times 0,4 = 0,2 + 1,2 + 2,8 = 4,2$

3) Calculer la probabilité $P(X \leqslant 3) =$ 0.6 ? $= 0,2 + 0,4 = 0,6$

LOI_PROBA1
LOI_PROBA1a

Rappel 3: variance et écart type

Modéliser par une variable aléatoire

Un jeu de grattage coûtant 1 € rapporte :

- 100 € avec une probabilité 0,005,
- 20 € avec une probabilité 0,01,
- 5 € avec une probabilité 0,02,
- 1 € avec une probabilité 0,1.
- 0 € avec une probabilité 0,865.

On considère la variable aléatoire G donnant
le gain algébrique à ce jeu (en tenant compte du prix du ticket).

1. Donner la loi de probabilité de G sous forme de tableau.

2. **a)** Calculer « à la main » E(G), l'espérance de G.

b) Déterminer à la calculatrice $\sigma(G)$, l'écart-type de G.

c) Ce jeu est-il équitable ?

3. Calculer $p(G \geqslant 15)$.

Tirages Gains x_i	-1	0	4	19	99
$P(X=x_i)$	$0{,}865$	$0{,}1$	$0{,}02$	$0{,}01$	$0{,}005$

Espérance $E(G)$:

$$-1\times 0{,}865+0\times 0{,}1+4\times 0{,}02+19\times 0{,}01+99\times 0{,}005$$

$$=-0{,}1$$

1 Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

Définition Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$** si elle prend pour valeurs les entiers de 1 à n de manière équiprobable, c'est-à-dire si $p(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout k entier entre 1 et n.

<u>Exemple</u> : On jette un dé équilibré à 6 faces

X = "le nombre obtenu"

X est une VARIABLE ALEATOIRE

La LOI DE PROBABILITE de X est donné par le

Tableau :

Issues (x_i)	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

La LOI DE PROBABILITE de X est donné par le

Tableau :

Issues (x_i)	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Exemple de loi uniforme

1 Dans un groupe de six amies, deux ont 1 frère, deux ont 2 frères et deux ont 3 frères.

On choisit une de ces amies au hasard et on considère la variable aléatoire F donnant son nombre de frère(s).

1. Justifier que F suit une loi uniforme.
2. Calculer $p(F \leqslant 2)$.

Exemple de loi uniforme

1 Dans un groupe de six amies, deux ont 1 frère, deux ont 2 frères et deux ont 3 frères.

On choisit une de ces amies au hasard et on considère la variable aléatoire F donnant son nombre de frère(s).

La loi de probabilité de F

Nombre de frères (x_i)	1	2	3
$P(F = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

F suit donc une loi UNIFORME

La loi de probabilité de F

Nombre de frères (x_i)	1	2	3
$P(F = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

F suit donc une loi UNIFORME

Calculons $P(F \leq 2) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

Propriété **Espérance et variance de la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$**

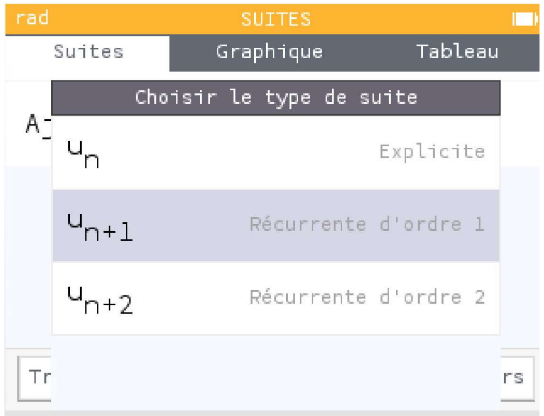
Pour X suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, on a :

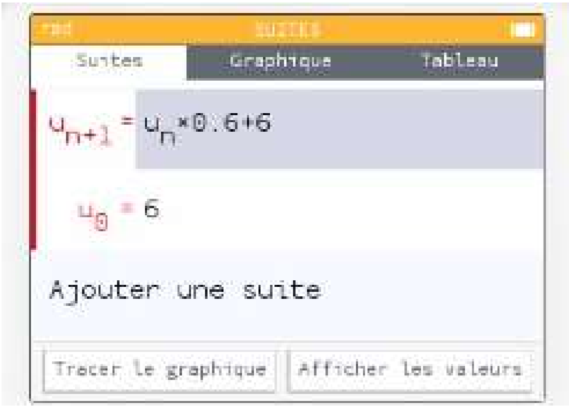
- $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$
- $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$
- $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$

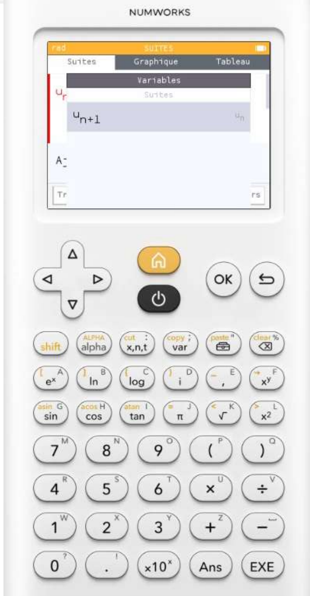
NUMWORKS

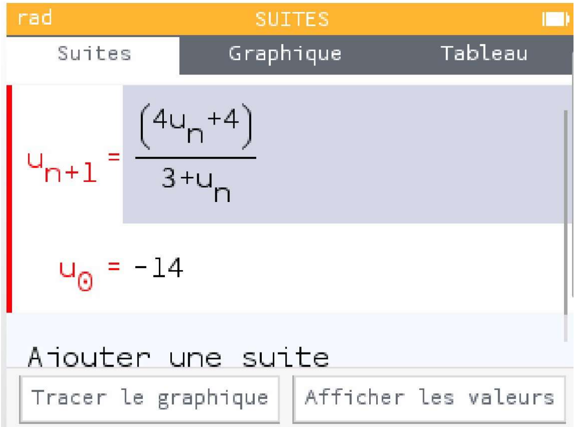

NUMWORKS
APPLICATIONS
Statistiques
Probabilités
Equations
Suites
Régressions
Eléments

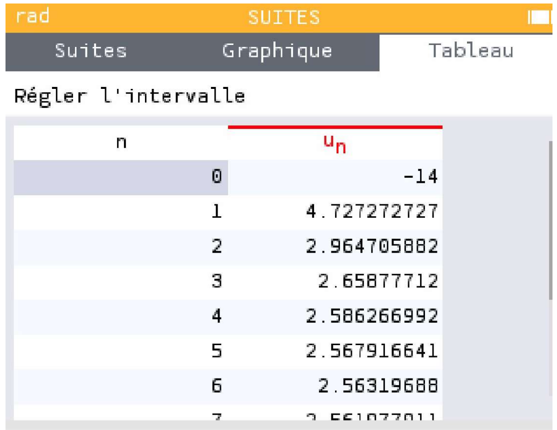

rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
Ajouter une suite
Tracer le graphique
Afficher les valeurs


rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
Choisir le type de suite
u_n
Explicite
u_{n+1}
Récurrente d'ordre 1
u_{n+2}
Récurrente d'ordre 2


Suites
Graphique
Tableau
$u_{n+1} = u_n \times 0.6+6$
$u_0 = 6$
Ajouter une suite
Tracer le graphique
Afficher les valeurs


NUMWORKS


rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
$u_{n+1} = \frac{(4u_n+4)}{3+u_n}$
$u_0 = -14$
Ajouter une suite
Tracer le graphique
Afficher les valeurs


rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
Régler l'intervalle
n
u_n
0
-14
1
4.727272727
2
2.964705882
3
2.65877712
4
2.586266992
5
2.567916641
6
2.56319688

2 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition Épreuve de Bernoulli

Une expérience aléatoire à deux issues, succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$ ou E), est dite **épreuve de Bernoulli**.

Définition Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0\,;1[$. La loi de la variable aléatoire X donnée ci-contre est appelée **loi de Bernoulli** de paramètre p, ce qui se note $\mathscr{B}(p)$.

	E	S
x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ (X suit une loi de Bernoulli de paramètre p)

Exemple : On joue à Pile / Face avec Pile = succès

On note $X = \begin{cases} 1 \text{ si Pile} \\ 0 \text{ si Face} \end{cases}$ $X \hookrightarrow \mathscr{B}(0{,}5)$

Tuteurs	Elèves devant terminer les exercices
EXOID 19 ARMOUET Candice BEGUE Derick BREUIL Ludovic CATHERINE Elodie DELAVIGNE Lou FRONTIN Marie Alexia GRIMAL Adrien LARDY Keyranne LEOCADIE Noemy LOUISE Cassie MARDAYE Eva MAUNIER Shaina MOURGUIN NAGUIN Guillaume PIMONT-LEFEBVRE Salome SAVIGNY Elody Elline SELLIER Mathilde SOUANTO Ambre VYSKOC Misha WONG PIN Floriane WONG PIN Victor ------ 20 / 26 ------	**EXOID 19** FRANCOMME Noa LOF Ivan MAILLOT MORIN Emerick MOUNICHY Logarnarden TECHER Sloane Marie Litana leverger --------6 / 26--------

Variance et écart type

$$V(X) = 0{,}865 \times (-1-(-0{,}1))^2$$
$$+ 0{,}1 \times (0-(-0{,}1))^2$$
$$+ 0{,}02 \times (4-(-0{,}1))^2$$
$$+ 0{,}01 \times (19-(-0{,}1))^2$$
$$+ 0{,}005 \times (99-(-0{,}1))^2$$

$$V(X) = 53{,}79$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i \times (x_i - E(X))^2$$

Ecart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Définition

C'est une mesure de la dispersion.

Issues Gains x_i	-1	0	4	19	99
$P(X=x_i)$	$0{,}865$	$0{,}1$	$0{,}02$	$0{,}01$	$0{,}005$

Espérance $E(G)$:

$-1\times0{,}865+0\times0{,}1+4\times0{,}02+19\times0{,}01+99\times0{,}005$

$=-0{,}1$

LOI_PROBA2

Propriété Espérance, variance et écart-type suivant la loi de Bernoulli

Pour X suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, on a : • $E(X) = p$ • $V(X) = p(1-p)$ • $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Preuve

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

• $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p$

$$\boxed{E(X) = p}$$

• $V(X) = (1-p) \times (0 - E(X))^2 + p \times (1 - E(X))^2$

$= (1-p) \times p^2 + p(1-p)^2$

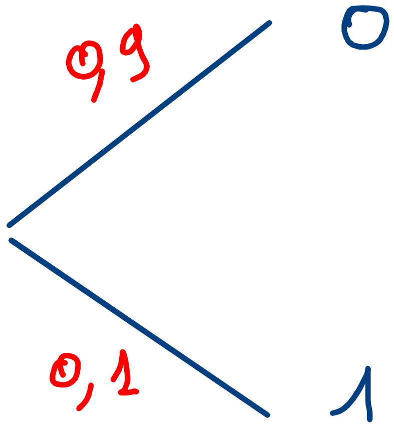
...

$= p(1-p)$

Exemple:

Dans un lycée, il y a 10 professeurs de mathématiques parmi les 100 professeurs. On tire au sort un professeur parmi ces 100 et on considère la variable aléatoire M donnant le nombre de professeurs de mathématiques obtenu (0 ou 1).

① Donner l'arbre de probabilité de M

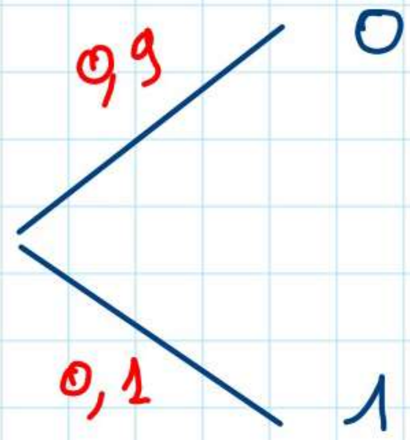


② Loi de probabilité de M.

$M \hookrightarrow \mathcal{B}(0,1)$

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	0,9	0,1

1. Donner l'arbre de probabilité de M



2. Loi de probabilité de M.

$M \hookrightarrow \mathcal{B}(\underbrace{0,1}_{p})$

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	0,9	$\underbrace{0,1}_{p}$

3. $E(X) = p = \boxed{0,1}$

4. $V(X) = p(1-p) = 0,1 \times 0,9 = 0,09$

5. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,09} = 0,3$

Exercice

1) Dans une urne de 25 boules, il y a 5 boules noires et le reste est constitué de boules rouges.
On choisi une boule au hasard dans cette urne et on note R la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées (donc 1 ou 0).
Déterminer E(R), V(R) et $\sigma(R)$ arrondis à 5 chiffres après la virgule si besoin.

E(R)= ?

V(R)= ?

$\sigma(R)$= ?

Variable aléatoire R donne le nombre de boules rouges : 0 ou 1

C'est une variable de Bernoulli : $R \hookrightarrow \mathcal{B}(0{,}2)$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(R) = p \\ V(R) = p(1-p) \\ \sigma(R) = \sqrt{V(R)} \end{array}}$$

$E(R) = 0{,}2$

$V(R) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$

$\sigma(R) = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

$\frac{5}{25}$

Variable aléatoire R donne le nombre de boules rouges : 0 ou 1

C'est une variable de Bernoulli : $R \hookrightarrow \mathcal{B}(0,2)$

$$\boxed{\begin{aligned} E(R) &= p \\ V(R) &= p(1-p) \\ \sigma(R) &= \sqrt{V(R)} \end{aligned}}$$

$E(R) = 0,2$

$V(R) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$

$\sigma(R) = \sqrt{0,16} = 0,4$

$\frac{5}{25}$

LOI_BERNOULLI0
LOI_BERNOULLI0a
LOI_BERNOULLI1

Variable aléatoire R donne le nombre de boules rouges : 0 ou 1

C'est une variable de Bernoulli : $R \hookrightarrow \mathcal{B}(0,2)$

$$\boxed{\begin{aligned} E(R) &= p \\ V(R) &= p(1-p) \\ \sigma(R) &= \sqrt{V(R)} \end{aligned}}$$

$E(R) = 0,2$

$V(R) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$

$\sigma(R) = \sqrt{0,16} = 0,4$

$\frac{5}{25}$

3 Schéma de Bernoulli

Définition Schéma de Bernoulli

La répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un **schéma de Bernoulli** de taille *n*.

3 Schéma de Bernoulli

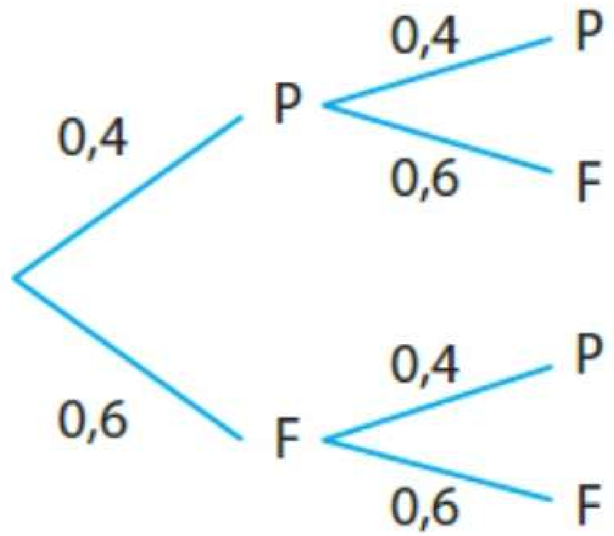
Définition Schéma de Bernoulli

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un **schéma de Bernoulli** de taille n.

<u>Exemple</u> :

On jette deux fois de suite une pièce de monnaie truquée

X = " nombre de pile "

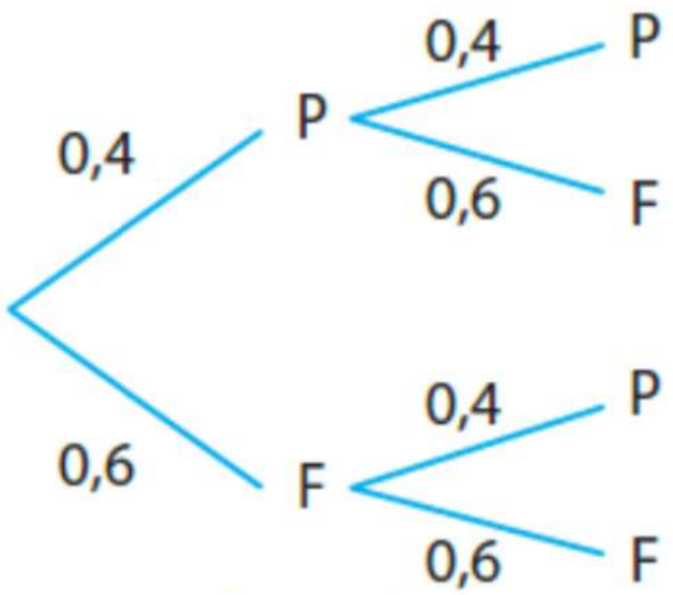


On a un schéma de Bernoulli de paramètre 0,4 et de taille 2

Exemple :

On jette deux fois de suite une pièce de monnaie truquée

$X =$ " nombre de pile "



On a un schéma de Bernoulli de paramètre 0,4 et de taille 2

4 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition Coefficients binomiaux

Pour n et k entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n », est le nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille $n \neq 0$ et par convention, $\binom{0}{0} = 1$.

On a un schema de Bernoulli de paramètre 0,4 et de taille 2

4 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition Coefficients binomiaux

Pour n et k entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n », est le nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille $n \neq 0$ et par convention, $\binom{0}{0} = 1$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ ("k parmi n") est le nombre de chemins de l'arbre où il y a exactement k succès.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ ("k parmi n")
est le nombre de chemins de l'arbre où il y a exactement k succès.

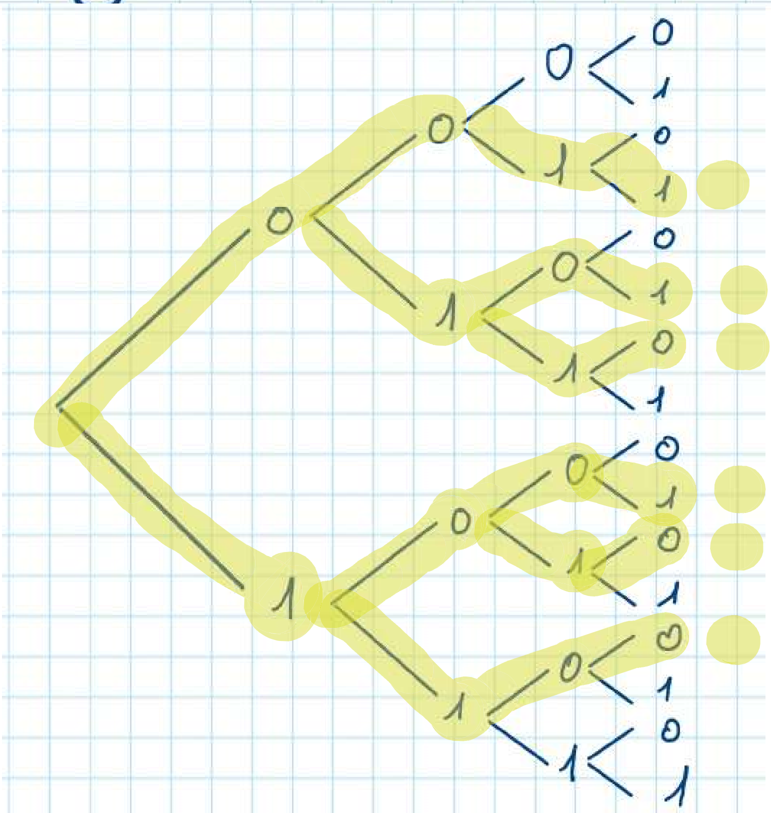
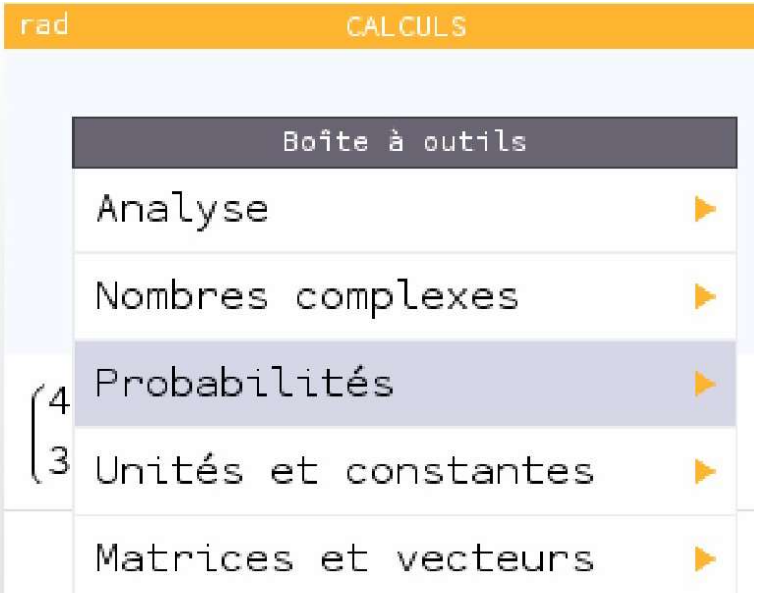


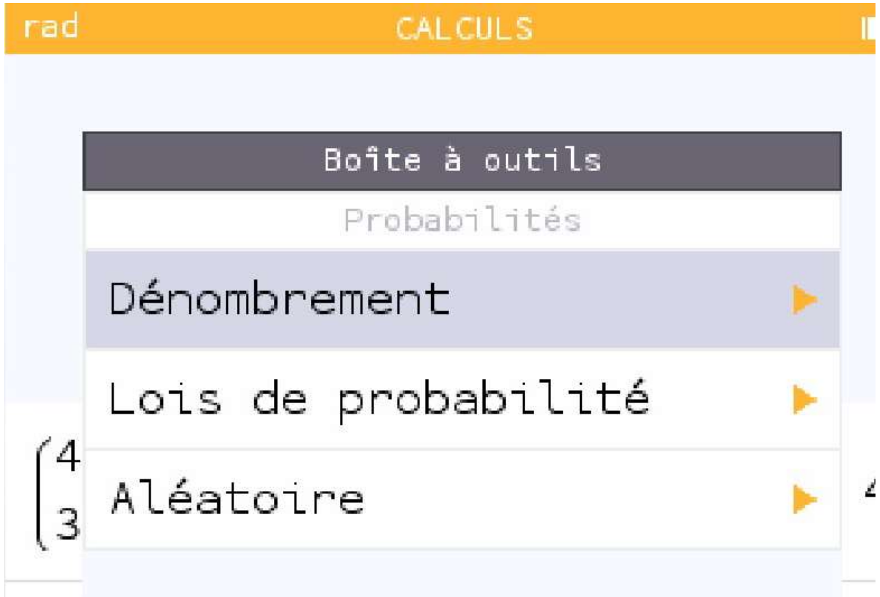
Schéma de Bernoulli de taille 4

Exemples :

a) $k = 3$: $\binom{4}{3} = 4$

b) $k = 2$: $\binom{4}{2} = 6$


rad
CALCULS
Boîte à outils
Analyse
Nombres complexes
Probabilités
Unités et constantes
Matrices et vecteurs

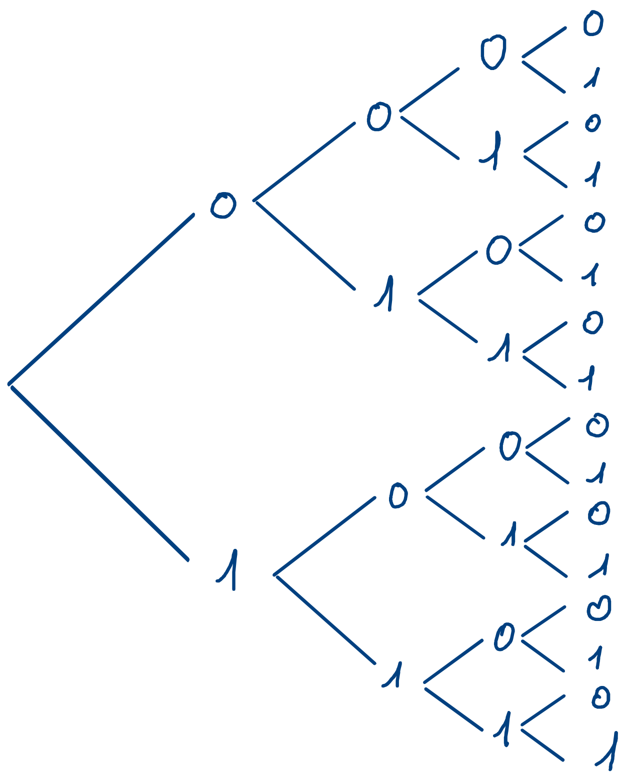

rad
CALCULS
Boîte à outils
Probabilités
Dénombrement
Lois de probabilité
Aléatoire


Boîte à outils
Probabilités > Dénombrement
k parmi n
permute(n,k)
Arrangement
n!
Factorielle

4 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition Coefficients binomiaux

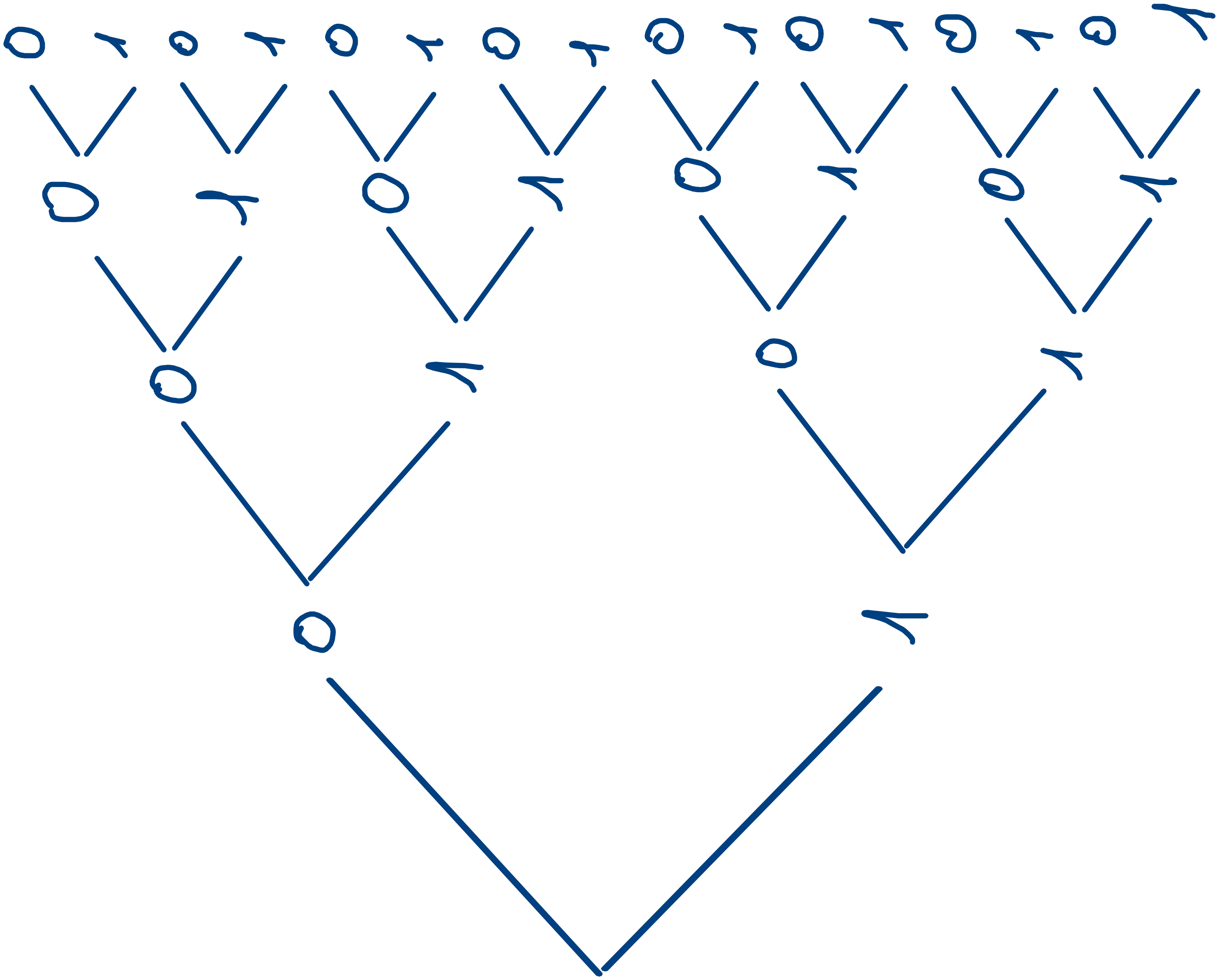
Pour n et k entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n », est le nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille $n \neq 0$ et par convention, $\binom{0}{0} = 1$.



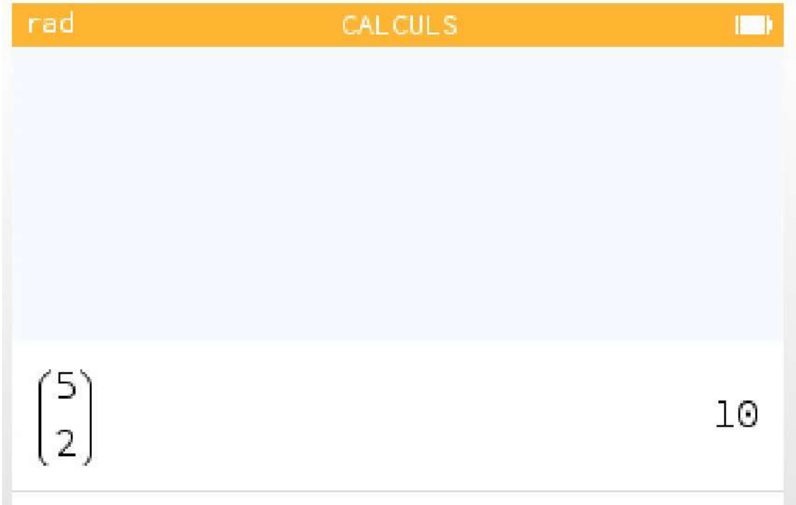
<u>Exemples :</u>

a) $k = 3$

b) $= k = 2$


0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
0 1 0 1 0 1 0 1
0 1 0 1
0 1

Avec la calculatrice



Exercice 1: calculer des coefficients binomiaux

En utilisant la calculatrice, calculer les coefficients binomiaux suivants:

$\binom{8}{5} =$ 56 Soı et $\binom{14}{11} =$ ____ Soı

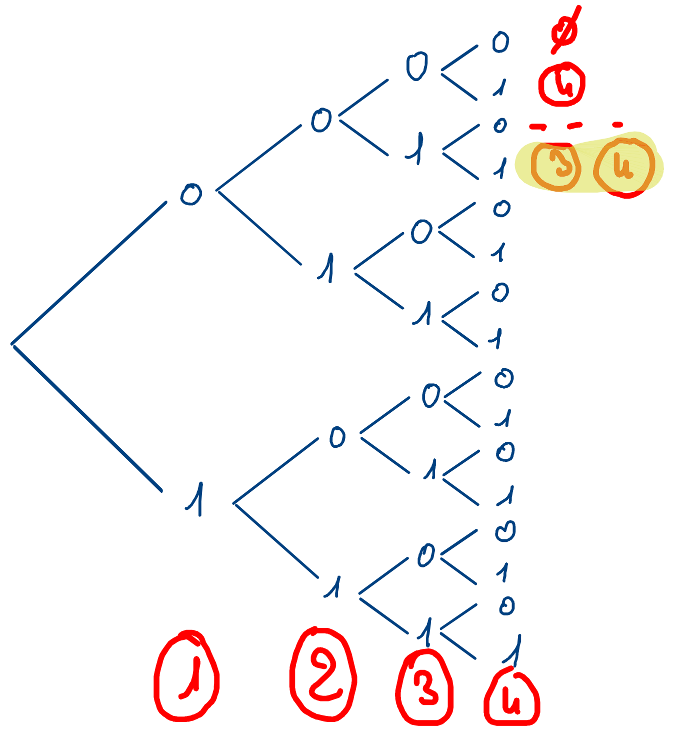
CALCULATRICE_COEFF_BINOM0
CALCULATRICE_COEFF_BINOM1

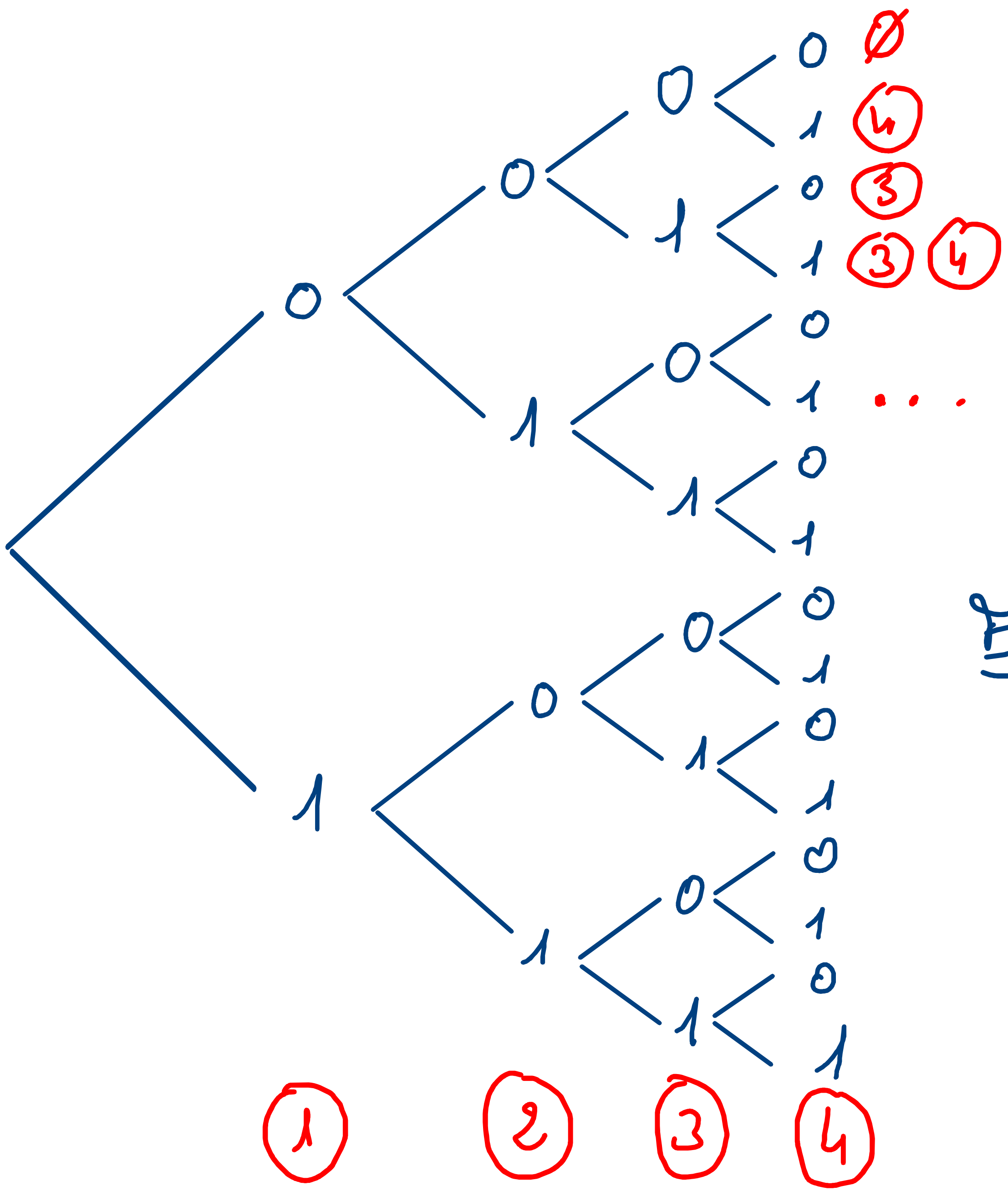
Exercice 2: utiliser des coefficients binomiaux

Dans une urne de 4 boules numérotées 1 2 3 4

on tire successivement et sans remise 2 boules

Le nombre de tirages possibles est :





Boules : 1 2 3 4

Il y $\binom{4}{2} = 6$

tirages possibles

Ex : Loto 49 boules

on tire 7 boules

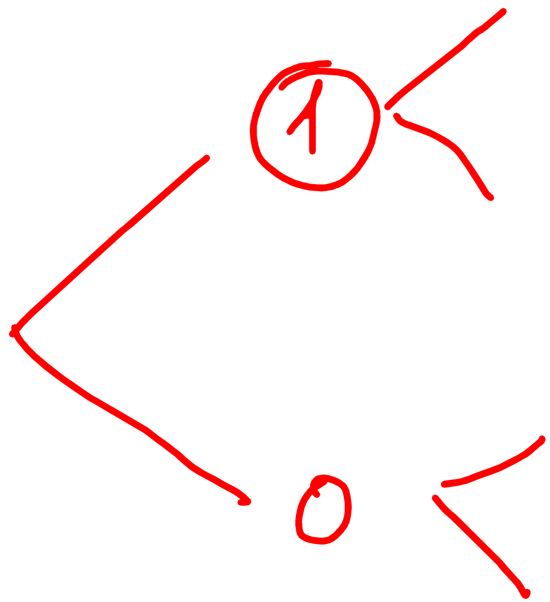
$$\binom{49}{7} \simeq 86\,000\,000$$

Boules de 1 à 49

Exercice 3: utiliser des coefficients binomiaux

On jette une pièce de monnaie 19 fois.

Le nombre de tirages possibles avec 2 fois pile est



$$\binom{19}{2} =$$

DENOMBREMENT_COEFF_BINOM0
DENOMBREMENT_COEFF_BINOM0a
DENOMBREMENT_COEFF_BINOM1

Avec le triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

$\bullet \xrightarrow{+} \bullet$

$\downarrow =$

$\bullet$

$$\binom{4}{2} = 6 \qquad \begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$$

$$\binom{4}{3} = 4 \qquad \begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$$