

# Automatismes : calcul numérique et algébrique

## Propriétés essentielles

### Bloc 1 Comparer deux nombres

Pour comparer deux nombres, on peut utiliser la différence :

$$a - b > 0 \iff a > b, \quad a - b < 0 \iff a < b.$$

Si  $b > 0$ , alors :

$$\frac{a}{b} < 1 \iff a < b, \quad \frac{a}{b} > 1 \iff a > b.$$

Pour comparer deux fractions positives, on peut aussi utiliser les produits en croix.

### Bloc 2 Fractions

Pour  $b \neq 0$  et  $d \neq 0$  :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad (c \neq 0)$$

On simplifie toujours le résultat si possible.

### Bloc 3 Puissances

Pour  $a \neq 0$  :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### Bloc 4 Pourcentages et conversions

Un pourcentage est une fraction de dénominateur 100 :

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35.$$

Conversions utiles :

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$$

### Bloc 5 Calcul littéral

Développer :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Réduire :

$$3x - 5 + 2x + 7 = 5x + 2$$

Attention aux signes :

$$-(a + b) = -a - b$$

$$-(a - b) = -a + b = b - a$$

### Bloc 6 Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

### Bloc 7 Factoriser

Factoriser consiste à transformer une somme en produit :

$$ka + kb = k(a + b)$$

Exemple :

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$$

Avec une identité remarquable :

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$$

### Bloc 8 Équations et inéquations

Équation du premier degré :

$$3x + 5 = 17 \iff 3x = 12 \iff x = 4$$

Équation produit nul :

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Attention : dans une inéquation, lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change.

## Exemples et applications directes

### Exemple 1 Comparer deux fractions

Comparer :

$$\frac{7}{12} \text{ et } \frac{3}{5}.$$

**Solution :**

$$7 \times 5 = 35 \quad 3 \times 12 = 36$$

Comme  $35 < 36$  :

$$\frac{7}{12} < \frac{3}{5}.$$

### Exemple 2 Comparer à l'aide d'un quotient

Soient  $a > 0$  et  $b > 0$ .

Si :

$$\frac{a}{b} < 1,$$

alors :

$$\frac{a}{b} < \frac{b}{b} \iff a < b.$$

### Exemple 3 Addition de fractions

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

### Exemple 4 Soustraction de fractions

$$\frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{15}{12} - \frac{8}{12} = \frac{7}{12}.$$

### Exemple 5 Produit de fractions

$$\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

### Exemple 6 Quotient de fractions

$$\frac{4}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

### Exemple 7 Produit de puissances

$$x^3 \times x^5 = x^{3+5} = x^8.$$

### Exemple 8 Quotient de puissances

Pour  $a \neq 0$  :

$$\frac{a^7}{a^2} = a^{7-2} = a^5.$$

### Exemple 9 Puissance d'une puissance

$$(x^4)^3 = x^{4 \times 3} = x^{12}.$$

**Exemple 10 Écriture décimale et fractionnaire**

$$0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}.$$

**Exemple 11 Pourcentage**

$$35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}.$$

**Exemple 12 Ordre de grandeur**

$$198 \times 51 \approx 200 \times 50 = 10\,000.$$

**Exemple 13 Conversion de longueur**

$$3,5 \text{ km} = 3,5 \times 1000 \text{ m} = 3500 \text{ m}.$$

**Exemple 14 Conversion d'aire**

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

Donc :

$$2 \text{ m}^2 = 20\,000 \text{ cm}^2.$$

**Exemple 15 Conversion de vitesse**

Comme :

$$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h},$$

on a :

$$72 \text{ km/h} = \frac{72}{3,6} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}.$$

**Exemple 16 Opposé d'une somme**

$$-(a + b) = -a - b.$$

**Exemple 17 Opposé d'une différence**

$$-(a - b) = -a + b = b - a.$$

**Exemple 18 Réduire une expression**

$$3x - 5 + 2x + 7 = 3x + 2x - 5 + 7 = 5x + 2.$$

**Exemple 19 Développer**

$$3(x - 4) = 3x - 12.$$

**Exemple 20 Double distributivité**

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10.$$

**Exemple 21 Carré d'une somme**

$$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16.$$

**Exemple 22** Différence de deux carrés

$$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9.$$

**Exemple 23** Factoriser avec un facteur commun

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3).$$

**Exemple 24** Factoriser avec une identité remarquable

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5).$$

**Exemple 25** Résoudre  $x^2 = a$ 

$$x^2 = 49 \iff x = -7 \text{ ou } x = 7.$$

**Exemple 26** Équation du premier degré

$$3x + 5 = 17 \iff 3x = 12 \iff x = 4.$$

**Exemple 27** Équation avec inconnue au dénominateur

Résoudre :

$$\frac{12}{x} = 3, \quad x \neq 0.$$

Solution :

$$12 = 3x \iff x = 4.$$

**Exemple 28** Inéquation du premier degré

$$2x - 5 < 7 \iff 2x < 12 \iff x < 6.$$

**Exemple 29** Isoler une variable

Si :

$$A = \frac{bh}{2},$$

alors :

$$2A = bh \iff h = \frac{2A}{b} \quad (b \neq 0).$$

**Exemple 30** Application numériqueSi  $E = mc^2$ ,  $m = 2$  et  $c = 3$ , alors :

$$E = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18.$$

**Exemple 31** Équation produit nul

$$(x - 2)(x + 5) = 0$$

$$\iff x - 2 = 0 \text{ ou } x + 5 = 0$$

$$\iff x = 2 \text{ ou } x = -5.$$

**Exemple 32** Signe d'une expression du premier degré

$$3x - 6 > 0 \iff 3x > 6 \iff x > 2.$$

**Exemple 33 Zéros d'une expression factorisée**

$$(x - 1)(x + 4) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -4.$$

**Exemple 34 Vraisemblance d'un résultat**

Un objet coûte 19,90 et on en achète 3.

$$19,90 \times 3 \approx 20 \times 3 = 60.$$

Le total est proche de 60.