

Fonctions et dérivation

Dérivation

Bloc 1 Dérivées des fonctions de référence

f définie sur	Fonction f	Dérivée f'	f dérivable sur
\mathbb{R}	$x \mapsto c$	0	\mathbb{R}
\mathbb{R}	x	1	\mathbb{R}
\mathbb{R}	x^2	$2x$	\mathbb{R}
\mathbb{R}	x^3	$3x^2$	\mathbb{R}
\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$]0; +\infty[$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
\mathbb{R}	e^x	e^x	\mathbb{R}

Bloc 2 Opérations et dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$(u(ax + b))' = a \times u'(ax + b)$$

$$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$$

Bloc 3 Tangente à une courbe

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Fonctions

Bloc 4 Théorèmes fondamentaux

- Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.
- Si une fonction f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation :

$$f(x) = k$$

admet une unique solution dans $[a; b]$.

Bloc 5 Asymptotes horizontales

La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Elle est asymptote horizontale en $-\infty$ lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

Limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Bloc 6 Asymptotes verticales

La droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f lorsque :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

Limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Bloc 7 Théorèmes de comparaison et des gendarmes

Théorème de comparaison

Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle de type $]a; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Théorème des gendarmes

Si :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$$

Bloc 8 Composition et convexité

— Si u et v sont dérivables :

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

— Une fonction f est :

— **convexe** lorsque :

$$f''(x) \geq 0$$

— **concave** lorsque :

$$f''(x) \leq 0$$

— Si f'' change de signe en x_0 , alors le point d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.

Équations différentielles

Bloc 9 Équation différentielle $y' = ay$

Les solutions de :

$$y' = ay \quad (a \neq 0)$$

sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ke^{ax} \quad (K \in \mathbb{R})$$

Pour toute condition initiale :

$$f(x_0) = y_0$$

il existe une unique solution.

Bloc 10 Équation différentielle $y' = ay + b$

Les solutions de :

$$y' = ay + b \quad (a \neq 0)$$

sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

Pour toute condition initiale :

$$f(x_0) = y_0$$

il existe une unique solution.

À retenir

Synthèse générale

— Les dérivées usuelles doivent être connues par coeur.

— La dérivée d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

— La dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

— Une asymptote horizontale correspond à une limite finie.

— Une asymptote verticale correspond à une limite infinie.

— Le théorème des gendarmes permet d'obtenir une limite par encadrement.

— La convexité dépend du signe de f'' .

— Les solutions de :

$$y' = ay$$

sont de la forme :

$$Ke^{ax}$$

— Les solutions de :

$$y' = ay + b$$

sont de la forme :

$$Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

Exemples et applications

Exemple 1 Dérivée d'un produit

Soit :

$$f(x) = x^2 e^x$$

On pose :

$$u(x) = x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = e^x$$

Alors :

$$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x$$

Donc :

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

$$f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$$

Exemple 2 Équation de tangente

Soit :

$$f(x) = x^2$$

On cherche la tangente au point d'abscisse $a = 1$.

$$f'(x) = 2x$$

Donc :

$$f'(1) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

L'équation de la tangente est :

$$y = 2(x - 1) + 1$$

$$y = 2x - 1$$

Exemple 3 Théorème des gendarmes

On cherche :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

On sait que :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Donc :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$$

Exemple 4 Convexité

Soit :

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

On étudie le signe de f'' :

$$f''(x) < 0 \text{ si } x < 0$$

$$f''(x) > 0 \text{ si } x > 0$$

Donc :

- f est concave sur $] -\infty; 0[$;
- f est convexe sur $]0; +\infty[$;
- f'' change de signe en 0.

Ainsi :

$$\boxed{(0; 0) \text{ est un point d'inflexion}}$$

Exemple 5 Équation différentielle

On résout :

$$y' = 2y$$

Les solutions sont :

$$y(x) = Ke^{2x}$$

On impose :

$$y(0) = 3$$

Alors :

$$3 = Ke^0$$

$$K = 3$$

Donc :

$$y(x) = 3e^{2x}$$

Exemple 6 Équation différentielle avec second membre

On résout :

$$y' = 2y + 4$$

Les solutions sont :

$$y(x) = Ke^{2x} - \frac{4}{2}$$

$$y(x) = Ke^{2x} - 2$$

On impose :

$$y(0) = 5$$

Alors :

$$5 = K - 2$$

$$K = 7$$

Donc :

$$y(x) = 7e^{2x} - 2$$