

# Géométrie dans l'espace

## Positions relatives

### Bloc 1 Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace peuvent être :

- **coplanaires et sécantes** : elles se coupent en un point ;
- **coplanaires et strictement parallèles** ;
- **coplanaires et confondues** ;
- **non coplanaires** : elles ne sont contenues dans aucun même plan.

### Bloc 2 Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite  $d$  et un plan  $\mathcal{P}$  peuvent être :

- **strictement parallèles** :  $d \parallel \mathcal{P}$  ;
- **incluses** :  $d \subset \mathcal{P}$  ;
- **sécants** : leur intersection est un point.

### Bloc 3 Positions relatives de deux plans

Deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  peuvent être :

- **strictement parallèles** ;
- **confondus** ;
- **sécants** : leur intersection est une droite.

## Théorèmes de géométrie

### Bloc 4 Théorème du toit

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux plans sécants selon une droite  $\Delta$ .

Si une droite  $d_1$  de  $\mathcal{P}_1$  est strictement parallèle à une droite  $d_2$  de  $\mathcal{P}_2$ , alors :

$$\Delta \parallel d_1 \quad \text{et} \quad \Delta \parallel d_2$$

### Bloc 5 Caractérisation d'un plan

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points distincts non alignés de l'espace.

Le plan  $(ABC)$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace pour lesquels il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

### Bloc 6 Vecteurs coplanaires

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls de l'espace, avec  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires.

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

## Produit scalaire dans l'espace

### Bloc 7 Formules du produit scalaire

Soient :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On a aussi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

et :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

### Bloc 8 Orthogonalité

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

## Droites et plans

### Bloc 9 Représentation paramétrique d'une droite

La droite  $d$  passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et dirigée par le vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

### Bloc 10 Équation cartésienne d'un plan

Le plan passant par le point  $A(x_A; y_A; z_A)$  et dont un vecteur normal est

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Un vecteur normal au plan est donc :

$$\vec{n}(a; b; c)$$

## À retenir

### Synthèse

- Deux droites de l'espace peuvent être coplanaires ou non coplanaires.
- Deux plans sécants se coupent selon une droite.
- Le théorème du toit permet d'obtenir des parallélismes dans l'espace.
- Une droite est définie par un point et un vecteur directeur.
- Un plan est défini par un point et un vecteur normal.
- Dans l'espace, le produit scalaire se calcule par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

- Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
- Des vecteurs sont coplanaires si l'un est combinaison linéaire des deux autres.

## Exemples et applications

### Exemple 1 Représentation paramétrique d'une droite

Soit  $A(1; 2; -1)$  et :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 - 2k \\ z = -1 + 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

On peut aussi utiliser le vecteur :

$$-2\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

On obtient alors une autre représentation paramétrique de la même droite :

$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 2 + 4t \\ z = -1 - 8t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

En effet, multiplier un vecteur directeur par un réel non nul ne change pas la droite.

### Exemple 2 Produit scalaire

Soient :

$$\vec{u}(2; -1; 3) \quad \text{et} \quad \vec{v}(1; 4; -2)$$

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 3 \times (-2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 4 - 6 = -8$$

Donc :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = -8}$$

### Exemple 3 Orthogonalité de deux vecteurs

Soient :

$$\vec{u}(1; 2; -1) \quad \text{et} \quad \vec{v}(4; -1; 2)$$

On calcule :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + 2 \times (-1) + (-1) \times 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 2 - 2 = 0$$

Donc :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$$

#### Exemple 4 Équation cartésienne d'un plan

Soit un plan de vecteur normal :

$$\vec{n}(2; -3; 1)$$

passant par le point  $A(1; 2; 4)$ .

Une équation du plan est :

$$2x - 3y + z + d = 0$$

Comme  $A$  appartient au plan :

$$2 \times 1 - 3 \times 2 + 4 + d = 0$$

$$2 - 6 + 4 + d = 0$$

$$d = 0$$

Donc une équation du plan est :

$$\boxed{2x - 3y + z = 0}$$

#### Exemple 5 Appartenance d'un point à un plan

On considère le plan :

$$\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$$

Le point  $A(1; 0; 1)$  appartient-il au plan ?

On remplace  $x$ ,  $y$  et  $z$  par les coordonnées de  $A$  :

$$2 \times 1 - 0 + 3 \times 1 - 5 = 0$$

$$2 + 3 - 5 = 0$$

Donc :

$$\boxed{A \in \mathcal{P}}$$

#### Exemple 6 Vecteurs coplanaires

Soient :

$$\vec{u}(1; 0; 1), \quad \vec{v}(0; 1; 1), \quad \vec{w}(2; 3; 5)$$

On cherche  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Or :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha; \beta; \alpha + \beta)$$

On veut donc :

$$(\alpha; \beta; \alpha + \beta) = (2; 3; 5)$$

Ainsi :

$$\alpha = 2 \quad \text{et} \quad \beta = 3$$

et :

$$\alpha + \beta = 2 + 3 = 5$$

Donc :

$$\boxed{\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}}$$

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.