Calcul intégral

Primitives usuelles

Bloc 1 Définition d'une primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une fonction F est une primitive de f sur I si :

$$F'(x) = f(x)$$

Une fonction admet plusieurs primitives. Elles sont de la forme :

$$F(x) + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Bloc 2 Tableau des primitives usuelles

Fonction f	**Intervalle**	**Primitive** F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$ sinon	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$	$F(x) = \ln(x) + k$

Intégrale et primitive

Bloc 3 Calcul d'une intégrale avec une primitive

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$.
Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

On note aussi :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Bloc 4 Interprétation géométrique

Si f est continue et positive sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

représente l'aire située entre la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriétés de l'intégrale

Bloc 5 Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et λ un réel.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Bloc 6 Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Pour tous réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Bloc 7 Positivité et comparaison

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.
Si f est positive sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Si pour tout $x \in [a;b]$, on a :

$$f(x) \leq g(x)$$

alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Valeur moyenne et intégration par parties

Bloc 8 Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Bloc 9 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$, avec u' et v' continues.
Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

À retenir

Synthèse

— Pour calculer une intégrale, on cherche une primitive.

— Si F est une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

— L'intégrale est linéaire.

— La relation de Chasles permet de découper une intégrale.

— Si $f \geq 0$, alors son intégrale est positive.

— La valeur moyenne est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

— L'intégration par parties transforme une intégrale de produit.

Exemples et applications

Exemple 1 Calcul d'une intégrale avec une primitive

Calculer :

$$I = \int_1^3 2x\,dx$$

Une primitive de $f(x) = 2x$ est :

$$F(x) = x^2$$

Donc :

$$I = F(3) - F(1)$$

$$I = 3^2 - 1^2$$

$$I = 9 - 1 = 8$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^3 2x\,dx = 8}$$

Exemple 2 Intégrale d'un polynôme

Calculer :

$$I = \int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)\,dx$$

Une primitive est :

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Donc :

$$I = F(2) - F(0)$$

$$F(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 2$$

$$F(2) = 8 - 8 + 2 = 2$$

$$F(0) = 0$$

Donc :

$$\boxed{I = 2}$$

Exemple 3 Utiliser la linéarité

Calculer :

$$I = \int_0^1 (x^2 + e^x)\,dx$$

Par linéarité :

$$I = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 e^x\,dx$$

Une primitive de x^2 est :

$$\frac{x^3}{3}$$

Une primitive de e^x est :

$$e^x$$

Donc :

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [e^x]_0^1$$

$$I = \frac{1}{3} + (e - 1)$$

Ainsi :

$$\boxed{I = e - \frac{2}{3}}$$

Exemple 4 Relation de Chasles

On sait que :

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 10$$

et :

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 3$$

On cherche :

$$\int_2^4 f(x)\,dx$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

Donc :

$$10 = 3 + \int_2^4 f(x)\,dx$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_2^4 f(x)\,dx = 7}$$

Exemple 5 Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de :

$$f(x) = x^2$$

sur $[0;3]$.
On utilise :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Donc :

$$\mu = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx$$

Une primitive de x^2 est :

$$\frac{x^3}{3}$$

Ainsi :

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{27}{3} - 0 = 9$$

Donc :

$$\mu = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

Ainsi :

$$\boxed{\mu = 3}$$

Exemple 6 Positivité d'une intégrale

Soit :

$$f(x) = x^2 + 1$$

Sur $\mathbb{R}$, on a :

$$x^2 \geq 0$$

Donc :

$$x^2 + 1 > 0$$

Ainsi, sur $[0;2]$:

$$f(x) \geq 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_0^2 (x^2+1)\,dx \geq 0}$$

Exemple 7 Intégration par parties

Calculer :

$$I = \int_0^1 xe^x \, dx$$

On pose :

$$u(x) = x \qquad \text{et} \qquad v'(x) = e^x$$

Alors :

$$u'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad v(x) = e^x$$

Par intégration par parties :

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$$

On calcule :

$$[xe^x]_0^1 = 1 \times e^1 - 0 \times e^0 = e$$

et :

$$\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

Donc :

$$I = e - (e - 1)$$

$$I = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 xe^x \, dx = 1}$$

Exemple 8 Primitive avec logarithme

Calculer :

$$I = \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

Une primitive de :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

sur $]0; +\infty[$ est :

$$F(x) = \ln(x)$$

Donc :

$$I = [\ln(x)]_1^e$$

$$I = \ln(e) - \ln(1)$$

$$I = 1 - 0 = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = 1}$$