Fonction logarithme népérien

Propriétés

Bloc 1 Valeurs et identités fondamentales

Pour tout réel $x > 0$:

$$e^{\ln(x)} = x \qquad \ln(e^x) = x \qquad \ln(1) = 0 \qquad \ln(e) = 1 \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

Bloc 2 Croissance

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
Ainsi, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b \qquad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b$$

Bloc 3 Formules algébriques

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Bloc 4 Dérivation

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Limites

Bloc 5 Limites de référence

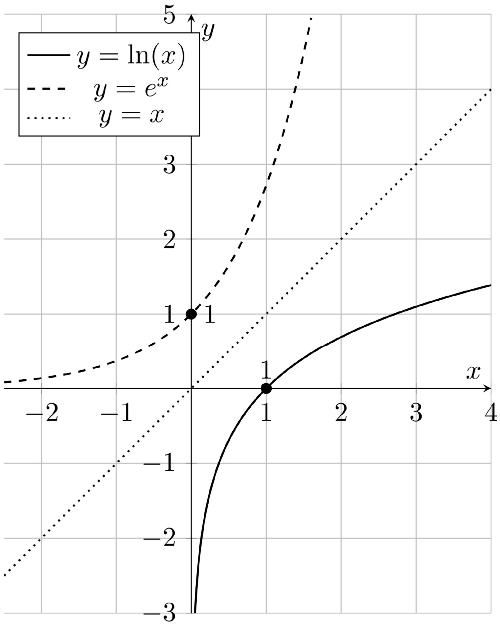
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0$$

Graphique de référence



À retenir

Les courbes de $y = \ln(x)$ et $y = e^x$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemples et applications

Exemple 1 Calcul direct

Calculer :

$$\ln(e^3) \quad ; \quad \ln(1) \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$$

Solution :

$$\ln(e^3) = 3 \quad ; \quad \ln(1) = 0 \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2$$

Exemple 2 Utilisation des formules

Simplifier :

$$\ln(2x) - \ln(x) \quad avec x > 0$$

Solution :

$$\ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

Exemple 3 Dérivation

Soit $f(x) = x\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
Solution :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Exemple 4 Dérivée composée

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ et $g(x) = (ln(x))^2$.
Solution : On sait que $(v \circ u)' = u' \times v'(u)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \; avec \; v(X) = ln(X) \;\; et \;\; u(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2 \times x \times \ln(x) \; avec \; v(X) = X^2 \;\; et \;\; u(x) = ln(x)$$

Exemple 5 Étude de fonction

Soit $f(x) = \ln(x) - x$ sur $]0, +\infty[$.
Dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

Signe :

- $f'(x) > 0$ si $x < 1$
- $f'(x) < 0$ si $x > 1$

Conclusion : f admet un maximum en $x = 1$:

$$f(1) = -1$$

Exemple 6 Limite

Calculer :

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln(x) + x)$$

Résultat : On a une F.I, par croissance comparée :

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln(x) + x) = \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) + x^2 = 0 + 0 = 0$$

Exemple 7 Équation

Résoudre :

$$\ln(x) = 2$$

Solution :

$$x = e^2$$

Exemple 8 Inéquation

Résoudre :

$$\ln(x) > 0$$

Solution :

$$x > 1$$

Exemple 9 Modélisation

$$P(t) = 100e^{0,2t}$$

Chercher t tel que $P(t) = 200$.
Solution :

$$t = \frac{\ln(2)}{0,2}$$

Exemple 10 Piège classique

$$\ln(x+1) \neq \ln(x) + \ln(1)$$

Aucune simplification possible.