Probabilités

Propriétés

Bloc 1 Formule des probabilités totales

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition d'un univers Ω et B un événement de Ω.
Alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

ou encore :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

Bloc 2 Événements indépendants

Deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

De manière équivalente, lorsque $P(A) > 0$:

$$P_A(B) = P(B)$$

L'information ń A est réalisé ż ne modifie donc pas la probabilité de B.

Bloc 3 Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On note :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Alors X prend deux valeurs : 0 et 1, avec $P(X = 1) = p$.

$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Bloc 4 Loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note :

$$X \sim \mathcal{B}(n; p)$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus :

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Bloc 5 Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale et soit $\alpha \in]0; 1[$.
Un intervalle $[a; b]$ tel que :

$$P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$$

est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil $1 - \alpha$, ou au risque α, associé à X.

Espérance et variance

Bloc 6 Propriétés de l'espérance et de la variance

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers fini Ω et a un nombre réel.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad E(aX) = aE(X)$$

Si X et Y sont indépendantes :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Enfin :

$$V(aX) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

Bloc 7 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.
Pour tout réel strictement positif δ :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Autrement dit :

$$P\big(X \notin]\mu - \delta ; \mu + \delta[\big) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Bloc 8 Inégalité de concentration

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance V. On pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

La variable M_n est la moyenne de cet échantillon. Pour tout réel strictement positif δ :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

Bloc 9 Loi faible des grands nombres

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ. On pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Pour tout réel strictement positif δ fixé :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$$

Lorsque la taille de l'échantillon augmente, la moyenne observée se rapproche de l'espérance.

À retenir

Synthèse

- La formule des probabilités totales permet de décomposer un événement selon plusieurs cas.
- Deux événements indépendants vérifient $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Une loi de Bernoulli modélise une expérience à deux issues : succès ou échec.
- Une loi binomiale compte le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une même expérience de Bernoulli.
- L'espérance mesure la moyenne théorique ; la variance et l'écart-type mesurent la dispersion.
- Les inégalités de concentration justifient la stabilisation autour de la moyenne.

Exemples et applications

Exemple 1 Probabilités totales

Une usine possède deux machines A et B. La machine A fabrique 60% des pièces et la machine B fabrique 40% des pièces. On sait que 2% des pièces issues de A sont défectueuses et 5% des pièces issues de B sont défectueuses.
Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
Solution :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$$

$$P(D) = 0{,}60 \times 0{,}02 + 0{,}40 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$$

La probabilité cherchée est donc 0,032, soit 3,2%.

Exemple 2 Indépendance

On donne $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
Solution :

$$P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$$

Comme $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, les événements A et B sont indépendants.

Exemple 3 Loi de Bernoulli

On lance une pièce truquée donnant pile avec une probabilité $p = 0{,}7$. On note $X = 1$ si l'on obtient pile et $X = 0$ sinon.
Solution :

$$X \sim \mathcal{B}(0{,}7)$$

$$E(X) = 0{,}7 \qquad V(X) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$$

Exemple 4 Loi binomiale

On répète 10 fois de manière indépendante une expérience dont la probabilité de succès est 0,2. On note X le nombre de succès.
Calculer $P(X = 3)$.
Solution :

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0{,}2)$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3}(0{,}2)^3(0{,}8)^7$$

Exemple 5 Espérance d'une loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(50; 0{,}12)$.
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
Solution :

$$E(X) = np = 50 \times 0{,}12 = 6$$

$$V(X) = np(1 - p) = 50 \times 0{,}12 \times 0{,}88 = 5{,}28$$

Exemple 6 Piège classique

Si deux événements A et B sont incompatibles, alors :

$$A \cap B = \varnothing$$

mais cela ne signifie pas forcément qu'ils sont indépendants.
En effet, si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$:

$$P(A \cap B) = 0 \qquad \text{alors que} \qquad P(A)P(B) > 0$$

Ils ne sont donc pas indépendants.