

# Suites

## Propriétés

### Bloc 1 Suite convergente

Soit  $(u_n)$  une suite et  $\ell$  un réel.

On dit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  lorsque, pour tout intervalle ouvert contenant  $\ell$ , toutes les valeurs de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

### Bloc 2 Suite qui tend vers $+\infty$

On dit que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  si, pour tout réel  $A$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :

$$u_n > A$$

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

### Bloc 3 Suite qui tend vers $-\infty$

On dit que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$  si, pour tout réel  $A$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :

$$u_n < A$$

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

### Bloc 4 Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

## Opérations sur les limites

### Bloc 5 Limite d'une somme

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites.

Si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$
$\ell$	$\ell'$	$\ell + \ell'$
$\ell$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

## Bloc 6 Limite d'un produit

Si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \ell \ell'$$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$\ell$	$\ell'$	$\ell \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	indéterminée

## Bloc 7 Limite d'un quotient

Si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \neq 0$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$$

Formes indéterminées classiques :

$$\frac{+\infty}{+\infty} \quad \frac{-\infty}{+\infty} \quad \frac{0}{0}$$

## Théorèmes de comparaison

### Bloc 8 Théorème de comparaison

Si, à partir d'un certain rang :

$$u_n \leq v_n$$

et si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

De même, si :

$$u_n \leq v_n$$

et si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

### Bloc 9 Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

## Suites particulières

### Bloc 10 Suites géométriques

Soit  $q$  un réel.

$$\text{Si } q > 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty,$$

$$\text{Si } -1 < q < 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0,$$

$$\text{Si } q \leq -1, \quad \text{la suite } (q^n) \text{ n'a pas de limite.}$$

### Bloc 11 Suite définie par récurrence (théorème du point fixe)

Soit une suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Si la suite  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$  et si la fonction  $f$  est continue en  $\ell$ , alors :

$$\ell = f(\ell)$$

La limite éventuelle est donc solution de l'équation :

$$f(x) = x$$

## À retenir

### Synthèse

- Une suite peut converger vers un réel ou diverger vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ .
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Les opérations sur les limites obéissent aux mêmes règles que les limites de fonctions.
- Les formes indéterminées classiques sont notamment  $+\infty - \infty$ ,  $0 \times \infty$  et  $\frac{0}{0}$ .
- Le théorème des gendarmes permet d'encadrer une suite pour obtenir sa limite.
- Si  $u_{n+1} = f(u_n)$  et si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors  $\ell = f(\ell)$ .

## Exemples et applications

### Exemple 1 Limite simple

Soit la suite définie par :

$$u_n = 3 + \frac{2}{n}$$

Comme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}$$

### Exemple 2 Suite géométrique

Soit :

$$u_n = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme :

$$-1 < \frac{1}{2} < 1,$$

on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5 \times 0 = 0$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

### Exemple 3 Forme indéterminée

Soit :

$$u_n = n^2 - 3n$$

C'est une forme indéterminée du type  $+\infty - \infty$ .

On factorise par le terme dominant :

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{3}{n}\right)$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right) = 1$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

#### Exemple 4 Théorème des gendarmes

On sait que :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Donc :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0}$$

#### Exemple 5 Suite définie par récurrence

Soit la suite définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

Si la suite converge vers une limite  $\ell$ , alors :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\ell = 3$$

Ainsi :

$$\ell = 6$$

$\boxed{\text{Si la suite converge, sa limite est } 6}$

Notez bien qu'il faut d'abord montrer que la suite converge avant d'appliquer ce théorème. Pour cela on peut par exemple utiliser le théorème de convergence monotone.