BAC BLANC 1de MATHEMATIQUES (SUJET 1)
MARS 2026

L'énoncé est à rendre avec la copie : pensez donc à mettre votre nom au moins sur la première page de l'énoncé. Les pages de copies devront être numérotées. La calculatrice est AUTORISÉE EN MODE EXAMEN UNIQUEMENT.

Nom et prénom : ____________________

Nom et prénom : ____________________

Exercice1(??pts)

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1er janvier 2025, on introduit 6000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

(1) Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026. (1 pts)

Solution : L'année 2026 correspond à $n = 1$.
Comme (u_n) est géométrique de raison 0,93, on a :

$$u_1 = u_0 \times 0{,}93 = 6 \times 0{,}93 = 5{,}58.$$

La population au 1er janvier 2026 est donc de 5,58 milliers d'individus, soit 5580 individus.

(2) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n. (1 pts)

Solution : Puisque (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times 0{,}93^n.$$

Donc

$$u_n = 6 \times 0{,}93^n.$$

(3) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. (1 pts)

Solution : On a

$$u_n = 6 \times 0{,}93^n.$$

Or $0 < 0{,}93 < 1$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}93^n = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Cela signifie que, selon ce modèle, la population du milieu A tend vers 0 millier d'individus, donc vers la disparition de la population.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \qquad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x.$$

(1) Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026. (1 pts)

Solution : L'année 2026 correspond à $n = 1$, donc on calcule v_1 :

$$v_1 = -0{,}05 \times 6^2 + 1{,}1 \times 6.$$

$$v_1 = -0{,}05 \times 36 + 6{,}6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8.$$

La population au 1er janvier 2026 est donc de 4,8 milliers d'individus, soit 4800 individus.

(2) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$. (2 pts)

Solution : La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$f'(x) = -0{,}1x + 1{,}1.$$

Pour $x \in [0; 11]$, on a

$$-0{,}1x + 1{,}1 \geq -0{,}1 \times 11 + 1{,}1 = 0.$$

Donc, pour tout $x \in [0; 11]$, $f'(x) \geq 0$.
On en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.

(3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a (3 pts)

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

Solution : On raisonne par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

Initialisation : pour $n = 0$,

$$v_0 = 6 \qquad \text{et} \qquad v_1 = 4{,}8.$$

On a bien

$$2 \leq 4{,}8 \leq 6 \leq 6.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

Comme $2 \leq v_{n+1} \leq 6$ et que f est croissante sur $[0; 11]$, on obtient

$$f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(6).$$

Or

$$f(2) = -0{,}05 \times 4 + 1{,}1 \times 2 = -0{,}2 + 2{,}2 = 2$$

et

$$f(6) = 4{,}8 \leq 6.$$

Donc

$$2 \leq v_{n+2} \leq 6.$$

De plus, comme $v_{n+1} \leq v_n$ et comme f est croissante sur $[0; 11]$, on a

$$f(v_{n+1}) \leq f(v_n),$$

soit

$$v_{n+2} \leq v_{n+1}.$$

Finalement,

$$2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6.$$

C'est exactement $\mathcal{P}(n+1)$.
La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n :

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

(4) En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ. (1 pts)

Solution : D'après la question précédente, pour tout entier naturel n,

$$2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6.$$

Ainsi, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2.
Une suite décroissante et minorée est convergente. On en déduit que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ avec

$$2 \leq \ell \leq 6.$$

(5) i. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ. (4 pts)

Solution : Comme la suite (v_n) converge vers ℓ et que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = f(v_n),$$

et comme f est continue sur $[0; +\infty[$, on peut passer à la limite :

$$\ell = f(\ell).$$

On résout donc l'équation

$$-0{,}05\ell^2 + 1{,}1\ell = \ell.$$

Cela donne

$$-0{,}05\ell^2 + 0{,}1\ell = 0$$

puis

$$\ell(-0{,}05\ell + 0{,}1) = 0.$$

Donc

$$\ell = 0 \qquad \text{ou} \qquad \ell = 2.$$

Or on sait que $\ell \in [2; 6]$, donc

$$\ell = 2.$$

ii. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. (1 pts)

Solution : Cela signifie que, selon ce modèle, la population du milieu B se stabilise à long terme autour de 2 milliers d'individus, soit 2000 individus.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

(1) En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3000 individus. (2 pts)

Solution : On cherche le plus petit entier naturel n tel que

$$u_n < 3.$$

Or

$$u_n = 6 \times 0{,}93^n.$$

Donc

$$6 \times 0{,}93^n < 3$$

soit

$$0{,}93^n < 0{,}5.$$

En prenant le logarithme népérien des deux membres :

$$n \ln(0{,}93) < \ln(0{,}5).$$

Comme $\ln(0{,}93) < 0$, le sens de l'inégalité change :

$$n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}93)} \approx 9{,}55.$$

Le plus petit entier convenable est donc $n = 10$.
L'année cherchée est donc $2025 + 10 = 2035$.
Conclusion : à partir de l'année 2035, la population du milieu A sera strictement inférieure à 3000 individus.

(2) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3000 individus. (½ pts)

Solution : On calcule les premiers termes de la suite (v_n) :

$$v_0 = 6, \quad v_1 = 4{,}8, \quad v_2 = 4{,}128, \quad v_3 \approx 3{,}689, \quad v_4 \approx 3{,}377,$$

$$v_5 \approx 3{,}145, \quad v_6 \approx 2{,}965.$$

Le premier terme strictement inférieur à 3 est donc v_6.
L'année correspondante est $2025 + 6 = 2031$.
Conclusion : à partir de l'année 2031, la population du milieu B sera strictement inférieure à 3000 individus.

(3) Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A. (½ pts)

Solution : D'après la partie A, la suite (u_n) converge vers 0.
D'après la partie B, la suite (v_n) converge vers 2.
Comme

$$2 > 0,$$

on en déduit qu'à partir d'un certain rang, on aura

$$v_n > u_n.$$

Autrement dit, à partir d'une certaine année, la population du milieu B sera strictement supérieure à celle du milieu A.

(4) On considère le programme Python ci-dessous.

i. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A. ($1\frac{1}{2}$ pts)

Solution : On peut compléter le programme ainsi :

```
n = 0
u = 6
v = 6
while v <= u :
    u = 0.93*u
    v = -0.05*v**2 + 1.1*v
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

ii. Déterminer l'année affichée après exécution du programme. ($\frac{1}{2}$ pts)

Solution : En calculant les termes successifs, on constate que le premier rang pour lequel

$$v_n > u_n$$

est $n = 13$.

Le programme affiche donc :

$$2025 + 13 = 2038.$$

Année affichée : 2038.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
   u = ...
   v = ...
   n = n + 1
print(2025 + n)
```