

BAC BLANC de MATHEMATIQUES (SUJET 2)
MARS 2026

L'énoncé est à rendre avec la copie : pensez donc à mettre votre nom au moins sur la première page de l'énoncé. Les pages de copies devront être numérotées. La calculatrice est **AUTORISÉE EN MODE EXAMEN UNIQUEMENT**

Nom et prénom: _____

Exercice1(20pts)

Domaines abordés : fonction exponentielle et suites numériques.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

- (a) i. Résoudre sur l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$. (4 pts)

Solution: On résout

$$2xe^{-x} = x.$$

Cela revient à écrire

$$x(2e^{-x} - 1) = 0.$$

Donc :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2e^{-x} - 1 = 0.$$

Dans le second cas :

$$2e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = \frac{1}{2} \iff -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

d'où

$$x = \ln 2.$$

Comme $0 \leq \ln 2 \leq 1$, les solutions sur $[0; 1]$ sont :

$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln 2.$

- ii. Démontrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, (4 pts)

$$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}.$$

Solution: On dérive le produit $2xe^{-x}$:

$$f'(x) = 2e^{-x} + 2x(-e^{-x}).$$

Donc

$$f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} = 2(1 - x)e^{-x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$,

$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}.$

- iii. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. (2 pts)

Solution: Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $e^{-x} > 0$ et $1 - x \geq 0$. Donc

$$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x} \geq 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0; 1]$.

De plus :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{2}{e}.$$

Tableau de variations :

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{2}{e}$

(b) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

i. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

(3 pts)

Solution: Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

Initialisation :

$$u_0 = 0,1, \quad u_1 = f(u_0) = 2 \times 0,1 \times e^{-0,1} = 0,2e^{-0,1} \approx 0,181.$$

Donc

$$0 \leq 0,1 < 0,181 \leq 1.$$

Ainsi, \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité :

Supposons qu'à un rang n , on ait

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

Comme f est croissante sur $[0; 1]$, on en déduit

$$f(u_n) < f(u_{n+1}),$$

soit

$$u_{n+1} < u_{n+2}.$$

De plus, puisque $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ et que f est croissante sur $[0; 1]$,

$$0 \leq u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(1) = \frac{2}{e} < 1.$$

Donc

$$0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1.$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1.$$

ii. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(1 pts)

(c) Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

(2 pts)

Solution: D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.

Notons ℓ sa limite. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est continue sur $[0; 1]$, on peut passer à la limite :

$$\ell = f(\ell) = 2\ell e^{-\ell}.$$

Donc ℓ vérifie l'équation

$$f(x) = x.$$

Or, d'après la question 1.a, les solutions de cette équation sur $[0; 1]$ sont 0 et $\ln 2$.

Comme $u_0 = 0,1 > 0$ et que la suite est croissante, sa limite ne peut pas être 0. On en déduit :

$$\ell = \ln 2.$$

- (d) i. Justifier que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) - u_n$ est positif. (1 pts)

Solution: La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln 2$. Donc, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq \ln 2.$$

Comme de plus $u_n \neq \ln 2$ pour tout n (la suite est strictement croissante et tend vers $\ln 2$ sans l'atteindre), on a même

$$u_n < \ln 2.$$

Ainsi

$$\ln(2) - u_n > 0$$

pour tout entier naturel n .

- ii. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir. Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé. (2 pts)

Solution: Comme u_n approche $\ln 2$ par valeurs inférieures, on doit continuer tant que

$$\ln(2) - u > 0,0001.$$

Et à chaque étape, on remplace u par

$$f(u) = 2ue^{-u}.$$

Le script complété est donc :

```
def seuil():
    n = 0
    u = 0.1
    while ln(2) - u > 0.0001 :
        n = n + 1
        u = 2*u*exp(-u)
    return (u, n)
```

Nom et prénom: _____

```
def seuil():  
    n = 0  
    u = 0.1  
    while ln(2) - u ...0.0001 :  
        n = n + 1  
        u = ...  
    return (u, n)
```

iii. Donner la valeur de la variable n renvoyée par la fonction `seuil()`.

(1 pts)

Solution: En exécutant l'algorithme, on obtient pour la première fois

$$\ln(2) - u_n \leq 10^{-4}$$

au rang

$$n = 11.$$

Question:	1	Total
Points:	20	20
Score:		