BAC BLANC de MATHEMATIQUES (SUJET 2)
MARS 2026

L'énoncé est à rendre avec la copie : pensez donc à mettre votre nom au moins sur la première page de l'énoncé. Les pages de copies devront être numérotées. La calculatrice est AUTORISÉE EN MODE EXAMEN UNIQUEMENT

Nom et prénom: ______________________________

Exercice1(20pts)

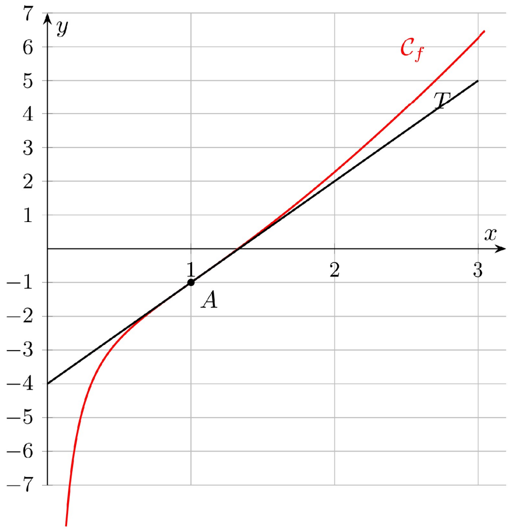
Domaines abordés : convexité, dérivées, représentations graphiques.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A de coordonnées $(1;-1)$. Cette tangente passe également par le point $B(0;-4)$.



(a) i. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T). (2 pts)

> **Solution:** La tangente (T) passe par $A(1;-1)$ et $B(0;-4)$. Son coefficient directeur vaut donc
>
> $$m = \frac{-1-(-4)}{1-0} = 3.$$
>
> Ainsi,
>
> $$\boxed{f'(1) = 3}.$$
>
> Comme la tangente passe par $B(0;-4)$, son équation réduite est
>
> $$\boxed{y = 3x - 4}.$$

ii. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. (1 pts)

> **Solution:** D'après le graphique, la courbe semble être :
>
> - **concave** sur $]0;1[$,
> - **convexe** sur $]1;+\infty[$.

iii. Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$? (1 pts)

Solution: Le point A semble être un **point d'inflexion** de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, car la courbe semble y changer de convexité.

Partie B : étude analytique

(b) i. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0. (2 pts)

Solution: On a

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x} = 2x\ln x - \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Quand $x \to +\infty$:
on sait que $2x\ln x \to +\infty$ et que $\frac{1}{x} \to 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

Quand $x \to 0^+$:
on sait que $x\ln(x^2) = 2x\ln x \to 0$, tandis que

$$-\frac{1}{x} \to -\infty.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}.$$

ii. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

α) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$. (2 pts)

Solution: On dérive

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

Pour le premier terme, avec la formule du produit :

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln(x^2)\right) = \ln(x^2) + x\cdot\frac{2}{x} = \ln(x^2) + 2.$$

De plus,

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}}.$$

β) Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, (2 pts)

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

Solution: On dérive l'expression obtenue pour $f'(x)$:

$$f'(x) = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Donc
$$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}.$$
On met au même dénominateur :
$$f''(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2-1)}{x^3}.$$
Or
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$
Ainsi
$$\boxed{f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}.$$

iii. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (4 pts)

Solution: Pour tout $x > 0$,
$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$
Comme $x^3 > 0$ et $x + 1 > 0$ pour tout $x > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 1$.
Donc :

- si $0 < x < 1$, alors $f''(x) < 0$: f est concave sur $]0; 1[$;
- si $x > 1$, alors $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]1; +\infty[$.

De plus, $f''(1) = 0$ et la convexité change en $x = 1$, donc le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion.
Comme
$$f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = -1,$$
le point d'inflexion est
$$\boxed{A(1; -1)}.$$

iv. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (4 pts)

Solution: D'après l'étude précédente :

- $f''(x) < 0$ sur $]0; 1[$, donc f' est décroissante sur $]0; 1[$;
- $f''(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$, donc f' est croissante sur $]1; +\infty[$.

La fonction f' admet donc un minimum en $x = 1$.
Or
$$f'(1) = \ln(1^2) + 2 + \frac{1}{1^2} = 0 + 2 + 1 = 3.$$
Ainsi, pour tout $x > 0$,
$$f'(x) \geq 3 > 0.$$
Donc
$$\boxed{f'(x) > 0 \text{ pour tout } x > 0.}$$
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$$

v. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$. (1 pts)

Solution: La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$, strictement croissante sur cet intervalle, et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0;+\infty[$.
Comme f est strictement croissante, elle ne peut couper l'axe des abscisses qu'une seule fois.
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.

vi. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie (1 pts)

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

Solution: À la calculatrice, on obtient :

$$\alpha \approx 1{,}327864\ldots$$

donc, au centième près :

$$\boxed{\alpha \approx 1{,}33}.$$

Comme α est solution de $f(x) = 0$, on a

$$\alpha\ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0.$$

Donc

$$\alpha\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}.$$

En multipliant par α, on obtient

$$\alpha^2\ln(\alpha^2) = 1.$$

Ainsi

$$\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

En exponentiant :

$$\boxed{\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}.$$

Question:	1	Total
Points:	20	20
Score:		