FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE (REF-1)

Nom et prénom: ______________________________

Exercice1(5pts)

Étudier une fonction logarithme

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto ln\left(\dfrac{5x+2}{13x+4}\right)$

(a) Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $D_f =]-\infty; -\frac{2}{5}[\cup]-\frac{4}{13}; +\infty[$ (1 pts)

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (1 pts)

(c) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \dfrac{-6}{(5x+2)(13x+4)}$ (1 pts)

(d) Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{2}{5} \\ x<-\frac{2}{5}}} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{4}{13} \\ x>-\frac{4}{13}}} f(x) = +\infty$ (1 pts)

(e) Dresser le tableau de variation complet de f sur D_f. (1 pts)

Exercice2(4pts)

Calcul de limites avec la fonction exponentielle.
On justifiera chaque résultat.

(a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-8x}$ (1 pts)

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x+3}{6e^x}$. (1 pts)

(c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x+4x^4}{-3x^3+7e^x} = \frac{3}{7}$. (1 pts)

(d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{4x} - x^4e^x + 5) = +\infty$ (1 pts)

Exercice3(10pts)

Calcul de limites avec la fonction logarithme.

(a) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2ln(x)+5}{6ln(x)-9}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (2 pts)

(b) Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(3x^2+x+3)$. (2 pts)
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln(x)}{x^n} = 0$ où n est un entier relatif non nul. (2 pts)
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^4ln(x) - 4x^8)$

(d) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto ln(8-2x)$. (2 pts)
Donner le domaine de définition $\mathbb{D}_f$ de f puis les limites aux bornes $\mathbb{D}_f$.

(e) Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto (ln(x))^7 - (ln(x))^3$. (2 pts)
Donner le domaine de définition $\mathbb{D}_f$ de f puis ses limites aux bornes de $\mathbb{D}_f$.

Exercice4(5pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(x^2+2x+2)$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. (1 pts)

(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (1 pts)

(c) Calculer l'expression de la dérivée f' de f. (1 pts)

(d) Dresser le tableau de variation de f. (1 pts)

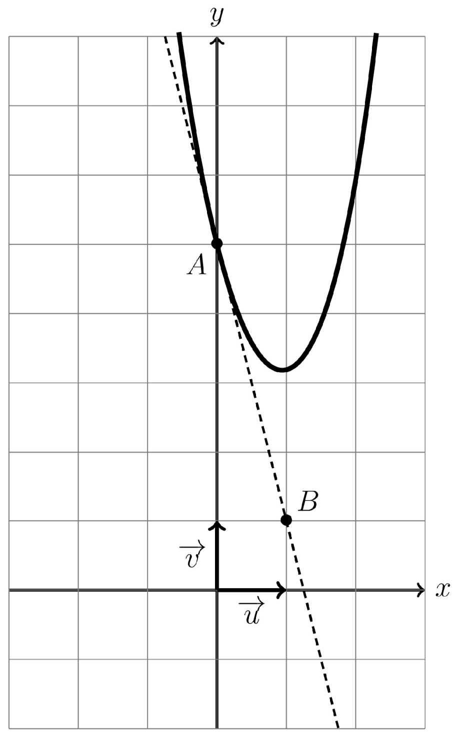
(e) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ puis donner un encadrement de α à 10^{-2} près. (1 pts)

Exercice5(3pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + ax + be^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f , et la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
A et B sont deux points de la droite $(\mathcal{T})$.



(a) En utilisant les informations précédentes, donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$. (1 pts)

(b) Donner l'expression de la dérivée f' de f en fonction de a et b. (1 pts)

(c) En déduire les valeurs de a et b. (1 pts)

Exercice6(5pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^x - 4x - 5$

(a) Calculer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en $-\infty$. (1 pts)

(b) Dresser le tableau de variation complet de f. (1 pts)
On donnera une valeur approchée de $f(ln(4))$ à 10^{-2}.
Justifier.

(c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$. (1 pts)

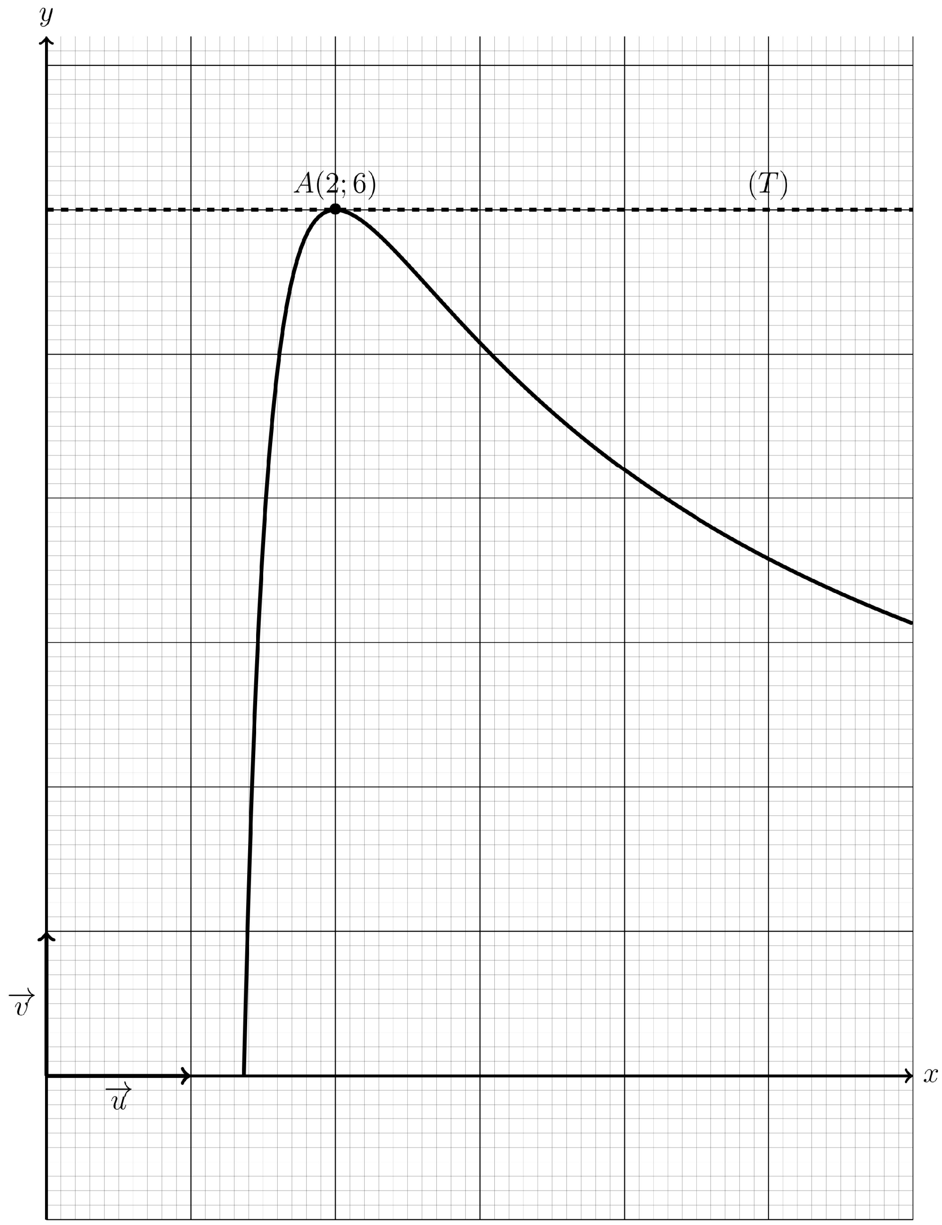
(d) Montrer que $\alpha \in [1; 1]$ puis complèter l'algorithme suivant qui permet de déterminer la valeur de α par la méthode de dichotomie: (1 pts)

```
def f(x):
        return (exp(x) - 4 * x - 5)
borneINF=...
borneSUP=...
while(abs(borneSUP-borneINF)<0.01):
        milieu= ...........
        if (f(milieu)*f(borneINF)<0):
              borneSUP=milieu
        else:
              borneINF=milieu
print(borneINF)
```

(e) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α et de β à 10^{-2}. (1 pts)

Exercice7(18pts)

Dans le plan muni d'un repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]c; \infty[$:
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(2; 6)$.



(a) Préciser les valeurs de $f(2)$ et $f'(2)$ (2 pts)

(b) On suppose dans la suite que la fonction f est définie par:

$$f(x) = \frac{a + 3b \times ln(x-1)}{x-1} \text{ où a et b sont des nombres réels.}$$

i. Justifier que le domaine de définition de la fonction f est $]1; +\infty[$. (2 pts)

ii. Démontrer que, pour tout réel $x > 1$, on a: (2 pts)

$$f'(x) = \frac{3b - a - 3b \times ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

iii. En déduire que $a = 6$ et $b = 2$. (2 pts)

(c) On considère dans cette dernière partie la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]1; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{6 + 6ln(x-1)}{x-1}.$$

i. Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$. (2 pts)

ii. Déterminer le tableau de variations **complet** de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$. (4 pts)

iii. Démontrer que, pour tout réel $x > 1$, on a: (2 pts)

$$f''(x) = \frac{-6 + 12ln(x-1)}{(x-1)^3}$$

iv. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera l'abscisse. Placer le point B sur le graphique puis donner une intérprétation graphique du résultat. (2 pts)

Exercice8(10pts)

(a) Soit f la fonction définie par (2 pts)

$$f(x) = e^{-5x-3}$$

Justifier et calculer la dérivée de la fonction f.

(b) Soit f la fonction définie par (2 pts)

$$f(x) = (5x^2 - x)e^{4x-1}$$

Justifier et calculer la dérivée de la fonction f sous la forme

$$f'(x) = P(x)e^{4x-1}$$

où P est un polynôme du second degré.

(c) Soit f la fonction définie par (2 pts)

$$f(x) = e^{\frac{-2x-5}{5x+4}}$$

Justifier et calculer la dérivée de la fonction f sous la forme

$$f'(x) = h(x)e^{\frac{-2x-5}{5x+4}}$$

où h est une fonction rationnelle.

(d) Soit f la fonction définie par (2 pts)

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{3x-5}}$$

Justifier et calculer la dérivée de la fonction f sous la forme

$$f'(x) = (k_0e^x + k_1)e^{-3x+5}$$

où k_0 et k_1 sont des entiers à déterminer.

(e) Soit f la fonction définie par (2 pts)

$$f(x) = \frac{e^{-3x^2}}{e^{-4x+4}}$$

Justifier et calculer la dérivé de la fonction f sous la forme

$$A(x)e^{P(x)}$$

où A est une fonction affine et P une fonction polynôme de degré 2.

Exercice9(3pts)

Dans chacun des exercices suivant, on donnera le schéma de composition.

(a) Soit f la fonction définie par (1 pts)

$$f(x) = ln(5x+5)$$

. Justifier et calculer la dérivé de la fonction f.
On précisera les ensembles de définition et de dérivabilité.

(b) Soit f la fonction définie par (1 pts)

$$f(x) = ln\left(\frac{-4x+1}{-2x-5}\right)$$

. Justifier et calculer la dérivé de la fonction f sous la forme

$$f'(x) = \frac{a}{(-4x+1)(-2x-5)}$$

où a est un nombre réel.
On précisera les ensembles de définition et de dérivabilité.

(c) Soit f la fonction définie par (1 pts)

$$f(x) = ln(\sqrt{x}+4)$$

.
Justifier et calculer la dérivé de la fonction f sous la forme

$$f'(x) = \frac{a}{bx + c\sqrt{x}}$$

où a, b et c sont des entiers naturels.
On précisera les ensembles de définition et de dérivabilité (on pourra utiliser tout graphique à main levée pour expliciter votre raisonnement).

Exercice10(10pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 18ln(x)$
On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.

(a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (1 pts)

(b) On admet que pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 18\dfrac{ln(x)}{x^2}\right)$. (1 pts)
En déduire la limite: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(c) Montrer que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - 9\right)}{x}$ (2 pts)

(d) Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation complet. (2 pts)
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0; +\infty[$.

(e) Démontrer que, sur l'intervalle $]0; 3]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α). (1 pts)

(f) On admet que sur l'intervalle $[3; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β. (1 pts)
(On ne cherchera pas à déterminer la valeur de β.
En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(g) Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0; +\infty[$ par: (2 pts)

$$g_k(x) = x^2 - 18ln(x) + k$$

Déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$.