Chapitre 1
Suites et récurrences

Rappels

1 Calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 1$.
Calculer u_0 et u_5.

2 Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \ldots$

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$

$u_0 \; \ldots \; u_n \quad u_{n+1} \quad u_{n+2}$

$u_n = 2 \times n$

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

① **Formule explicite :**

On peut calculer un terme de la suite par opérations sur n

② **Formule par récurrence**

On peut calculer un terme de la suite par opérations sur le terme précédent

Exercice 1 (p 13) :

$u_n = 3^n - 1$ → formule explicite.

$\boxed{a^0 = 1}$

$\boxed{3^0 = 1}$

$u_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$u_5 = 3^5 - 1 = 242$

2 Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 1 (p 13) :

$u_n = 3^n - 1$ → formule explicite.

$u_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$u_5 = 3^5 - 1 = ?\ 242$

Exercice 2 p 13

formule par récurrence $\boxed{\begin{cases} v_{n+1} = 2v_n - 1 \\ v_0 = 3 \end{cases}}$

$v_0 = 3$

$v_1 = 5$

$v_2 = 9$

$v_3 = 17$

$v_1 = 2v_0 - 1$
$= 2 \times 3 - 1 = 5$

$v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

Exercice 1 (p 13) :

$u_n = 3^n - 1$ → formule explicite.

$u_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$u_5 = 3^5 - 1 = ?\ 242$

Exercice 2 p 13

formule par récurrence $\boxed{\begin{array}{l} v_{n+1} = 2v_n - 1 \\ v_0 = 3 \end{array}}$

$v_0 = 3$

$v_1 = 5$

$v_2 = 9$

$v_3 = 17$

$v_1 = 2v_0 - 1$
$= 2 \times 3 - 1 = 5$

$v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

3) avec la calculatrice ~~(voir pdf)~~

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_{n+1} = \frac{4v_n + 4}{3 + v_n} \text{ et } v_0 = -14.$$

Calculer en utilisant le menu table de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-2} près du terme u_{21}:

u_{21}= [redacted]

2.56

Les outils de la classe:

Logiciel de géométrie: https://www.geogebra.org/download

Logiciel de calcul formel : xcas (ujf-grenoble.fr)

La calculatrice NUMWORKS: en ligne ou en téléchargement

La calculatrice TI en ligne.

Dossier GEOGEBRA

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{-2}{2+3n}$.

Calculer u_0,u_1 et u_2:

$u_0 =$

$u_1 =$

$u_2 =$

2) On considère la suite (v_n) définie par

$v_{n+1} = \dfrac{-2}{2+3v_n}$ et $v_0 = 2$.

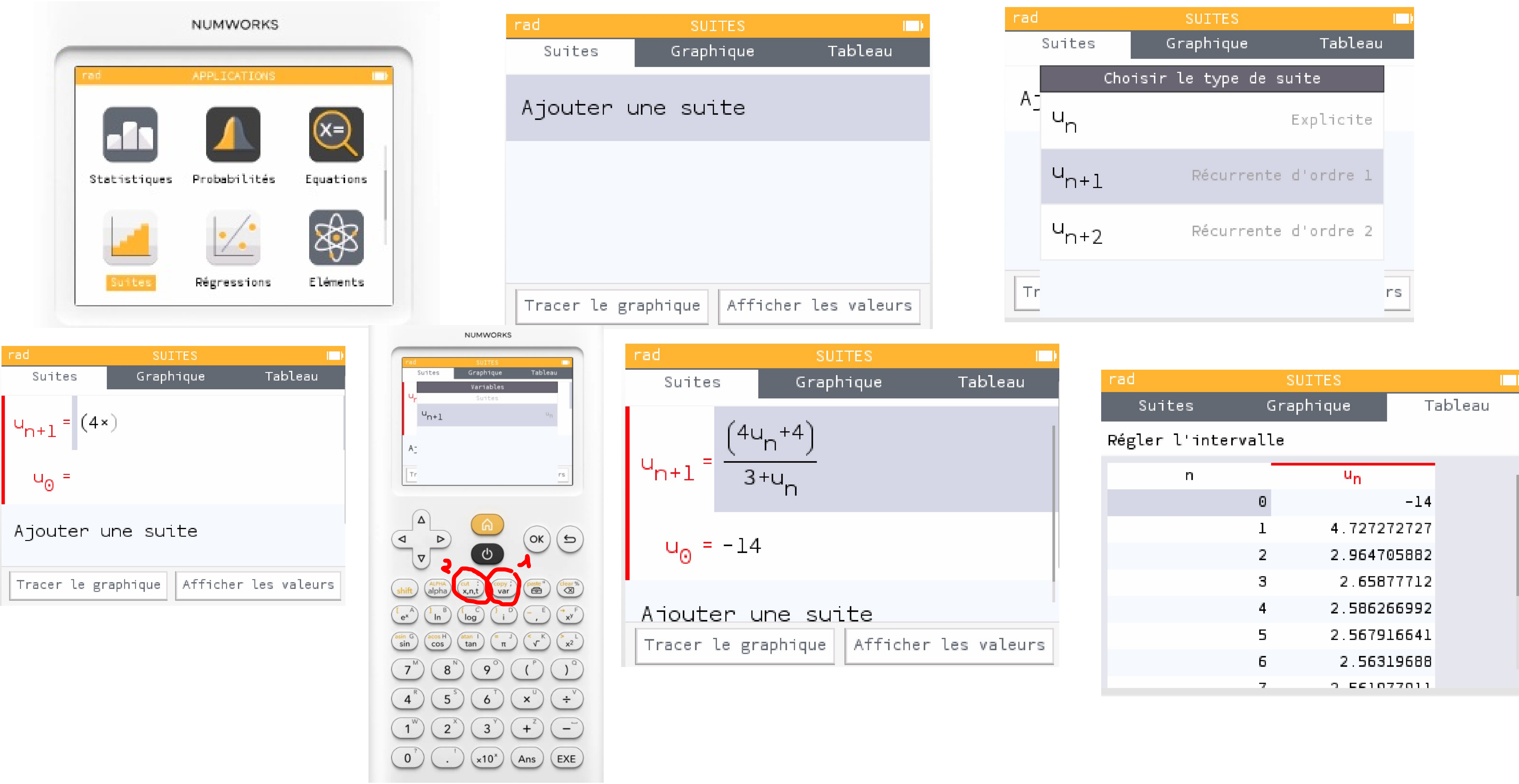
Calculer v_1,v_2 et v_3:

$v_1=$

$v_2=$

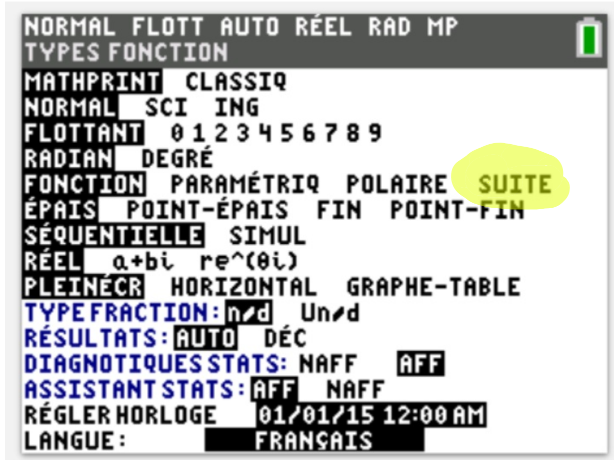
$v_3=$

NUMWORKS

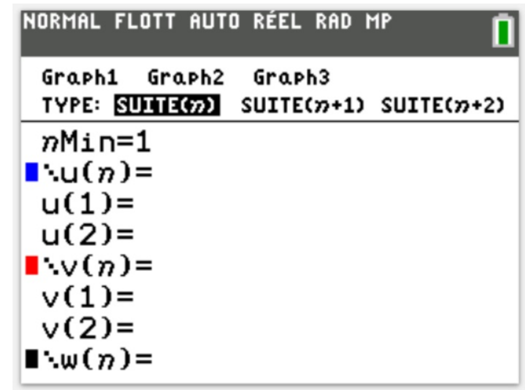

NUMWORKS
rad APPLICATIONS
Statistiques
Probabilités
Equations
Suites
Régressions
Eléments
rad SUITES
Suites Graphique Tableau
Ajouter une suite
Tracer le graphique
Afficher les valeurs
Choisir le type de suite
u n Explicite
u n+1 Récurrente d'ordre 1
u n+2 Récurrente d'ordre 2
u n+1 = (4×)
u 0 =
u n+1 = (4u n +4) / (3+u n)
u 0 = -14
Régler l'intervalle
n u n
0 -14
1 4.727272727
2 2.964705882
3 2.65877712
4 2.586266992
5 2.567916641
6 2.56319688
1
2

TI

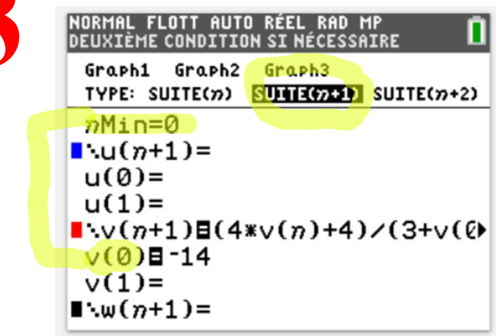
1



2

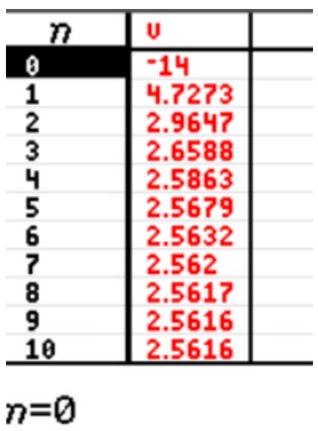


3



$$v_{n+1} = \frac{4v_n + 4}{3 + v_n} \text{ et } v_0 = -14.$$

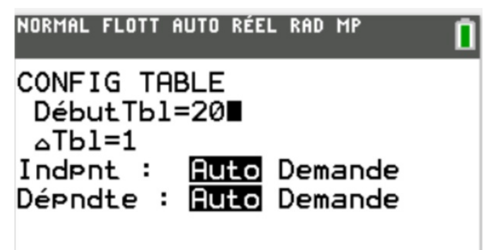
4

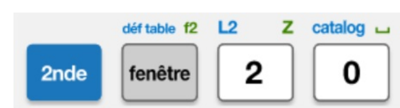


n	v
0	-14
1	4.7273
2	2.9647
3	2.6588
4	2.5863
5	2.5679
6	2.5632
7	2.562
8	2.5617
9	2.5616
10	2.5616

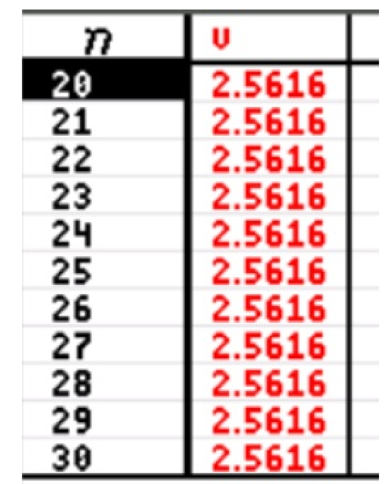
n=0

5





6



n	v
20	2.5616
21	2.5616
22	2.5616
23	2.5616
24	2.5616
25	2.5616
26	2.5616
27	2.5616
28	2.5616
29	2.5616
30	2.5616

CALCUL_TERMES_SUITE1
CALCUL_TERMES_SUITE2

CALCUL_TERMES_SUITE_CALCULATRICE1
CALCUL_TERMES_SUITE_CALCULATRICE1a

Extrait du manuel de Première

2 Suite arithmétique

Définition Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + (-0{,}5)$. (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r.

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n-1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r \times (n-p)$.

0 1 2 3 4

$2 \xrightarrow{+0,5} 2{,}5 \xrightarrow{+0,5} 3 \xrightarrow{+0,5} 3{,}5 \xrightarrow{+0,5} 4 \ldots$

raison : 0,5

Premier terme : $u_0 = 2$

Définitions

- $\boxed{\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}}$

formule de récurrence

- $\boxed{u_n = u_0 + n\,r}$

formule explicite

2 Suite arithmétique

Définition Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + (-0{,}5)$. (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r.

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n - 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r \times (n - p)$.

Attention au terme de départ

1	2	3	4	5

$$2 \xrightarrow{+0{,}5} 2{,}5 \xrightarrow{+0{,}5} 3 \xrightarrow{+0{,}5} 3{,}5 \xrightarrow{+0{,}5} 4 \ldots$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

5	6	7	8	9

$$2 \xrightarrow{+0{,}5} 2{,}5 \xrightarrow{+0{,}5} 3 \xrightarrow{+0{,}5} 3{,}5 \xrightarrow{+0{,}5} 4 \ldots$$

$$u_n = u_5 + (n-5)r$$

Extrait du manuel de Première

3 Suite géométrique

Définition Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$ est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.
- Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n$. Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 5$.

Remarques

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Si les termes sont non nuls, on peut aussi chercher à montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à une constante q.

- La variation relative entre deux termes consécutifs est constante.

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

0 1 2 3 4

$$0{,}5 \xrightarrow{\times 2} 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \longrightarrow \ldots$$

raison : 2

Premier terme : 0,5

- $\boxed{\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = u_n \times 2 \end{cases}}$ formule par récurrence

- $\boxed{u_n = 0{,}5 \times 2^n}$ formule explicite

Attention au terme de départ

3	4	5	6	7
0,5	1	2	4	8

$$0{,}5 \xrightarrow{\times 2} 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \rightarrow \dots$$

$$u_n = u_3 \times q^{n-3}$$

$$u_7 = u_3 \times q^{7-3} \quad = 4$$

EXERCICE 1

Soit u la suite arithmétique de raison -8. On donne $u_6 = -2$. Le terme de rang 23 de la suite est $u_{23} =$ ____ ? .

EXERCICE 1

Soit u la suite arithmétique de raison -8. On donne $u_6 = -2$. Le terme de rang 23 de la suite est $u_{23} =$ ______ ? .

premier terme : $u_6 = -2$

raison : -8

$$u_6 \xrightarrow{-8} u_7 \xrightarrow{-8} u_8 \xrightarrow{-8} \dots$$

$$u_n = u_6 + (n-6)r$$

$$u_{23} = u_6 + (23-6)\times(-8)$$

$$= -2 + 17\times(-8)$$

$$= -138$$

EXERCICE 2

Soit u une suite géomètrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = \frac{10}{7}$. On sait que le terme de rang 3 de la suite est $u_3 =$ 640/ 7 ? .

$u_n = u_0 \times q^n$, $u_3 = \frac{10}{7} \times 4^3 = \frac{640}{7}$

EXERCICE 3

Soit u une suite géomètrique de raison -4. On donne $u_{10} = -2$.
Le terme de rang 12 de la suite est alors $u_{12} =$ − 32 ? .

$u_n = u_{10} \times q^{n-10}$

$u_{12} = u_{10} \times (-4)^{12-10} = -2 \times 16 = -32$

SUITEARITH1.html
SUITEGEO1.html

Rappel de 1ère

Propriété Somme des n premiers entiers

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1+2+\ldots+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

Calculons $1+2+3+4+5+\ldots+96+97+98+99+100$

$$= \frac{100\times 101}{2} = \frac{100}{2}\times 101 = 50\times 101 = 5050$$

Propriété Somme de n premières puissances

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$q^0 = 1$

Calculons $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = \dfrac{1-2^6}{1-2} = \dfrac{1-64}{1-2} = \dfrac{-63}{-1} = 63$

$(=1)$

Exercice 1

Suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -4.5$ et de premier terme $u_0=-4$

En utilisant une formule du cours, la somme des 25 premiers termes de la suite est:
$u_0 + u_1 + ... + u_{25} =$?

$$(u_n) \begin{cases} \begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + (-4,5) \end{cases} & \text{récurrence} \\ u_n = -4 + n \times (-4,5) & \text{explicite} \end{cases}$$

(u_n)

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + (-4,5) \end{cases}$$ récurrence

$$u_n = -4 + n \times (-4,5)$$ explicite

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{25} \qquad \sum_{i=0}^{25} u_i$$

$$= \boxed{-4 + 0 \times (-4,5)} + \boxed{-4 + 1 \times (-4,5)} + \boxed{-4 + 2 \times (-4,5)} + \dots + \boxed{-4 + 25 \times (-4,5)}$$

$$= -4 \times 26 + \boxed{0} \times (-4,5) + \boxed{1} \times (-4,5) + \boxed{2} \times (-4,5) + \dots + \boxed{25} \times (-4,5)$$

$$= -104 + (0 + 1 + 2 + \dots + 25) \times (-4,5)$$

(Factorisation par $-4,5$)

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{25}$$

$$= \boxed{-4 + 0 \times (-4{,}5)} + \boxed{-4 + 1 \times (-4{,}5)} + \boxed{-4 + 2 \times (-4{,}5)} + \dots + \boxed{-4 + 25 \times (-4{,}5)}$$

$$= -4 \times 26 + 0 \times (-4{,}5) + 1 \times (-4{,}5) + 2 \times (-4{,}5) + \dots + 25 \times (-4{,}5)$$

$$= -104 + (0 + 1 + 2 + \dots + 25) \times (-4{,}5)$$

$$= -4\times 26 + 0\times(-4,5) + 1\times(-4,5) + 2\times(-4,5) + \dots + 25\times(-4,5)$$

$$= -104 + (0+1+2+\dots+25)\times(-4,5)$$

$$\boxed{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= -104 + \underline{(0+1+2+\dots+25)}\times(-4,5)$$

$$= -104 + \frac{25\times 26}{2}\times(-4,5)$$

$$= -1566,5$$

		B	C
		-4	
		-8,5	
3	u2	-13	
4	u3	-17,5	
5	u4	-22	
6	u5	-26,5	
7	u6	-31	
8	u7	-35,5	
9	u8	-40	
10	u9	-44,5	
11	u10	-49	
12	u11	-53,5	
13	u12	-58	
14	u13	-62,5	
15	u14	-67	
16	u15	-71,5	
17	u16	-76	
18	u17	-80,5	
19	u18	-85	
20	u19	-89,5	
21	u20	-94	
22	u21	-98,5	
23	u22	-103	
24	u23	-107,5	
25	u24	-112	
26	u25	-116,5	
27			-1566,5

SUITES_ARITH_GEO

SUITES_ARITH_GEOa

Exercice 2

Suite géométrique
(v_n) est une suite géomètrique de raison $q = 4$ et de premier terme $v_0=5$.
En utilisant une formule du cours, la somme des 9 premiers termes de la suite est: $v_0 + v_1 + \dots + v_9 =$ ☐ ?

(v_n)

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n \times 4 \end{cases}$$

Récurrence

$$v_n = 5 \times 4^n$$

Explicite

$$(v_n) \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n \times 4 \end{cases}$$

$$v_n = 5 \times 4^n$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_9$$

$$= \boxed{5 \times 4^0} + \boxed{5 \times 4^1} + \boxed{5 \times 4^2} + \dots + \boxed{5 \times 4^9}$$

$$= 5 \times \left(4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^9\right)$$

$$\boxed{q^0 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_9$$

$$= \boxed{5\times 4^0} + \boxed{5\times 4^1} + \boxed{5\times 4^2} + \dots + \boxed{5\times 4^9}$$

$$= 5\times\left(4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^9\right)$$

$$= \cancel{5\times\left(4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^9\right)}$$

$$\boxed{q^0 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

$q = 4$

$n = 9$

$$= 5\times\frac{\left(1-4^{10}\right)}{\left(1-4\right)}$$

$$= 1\,747\,625$$

$$= 5 \times (1 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^9)$$

$$= 5 \times \frac{(1 - 4^{10})}{(1 - 4)}$$

$$1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= 1\,747\,625$$

	A	B	C
1	u0	5	
2	u1	20	
3	u2	80	
4	u3	320	
5	u4	1280	
6	u5	5120	
7	u6	20480	
8	u7	81920	
9	u8	327680	
10	u9	1310720	
11			1747625

SUITES_ARITH_GEO1
SUITES_ARITH_GEO1a

Types de raisonnement en logique

Déduction

$A \Rightarrow B$

(Mathématiques)

$2x = 4$

$\Downarrow$

$x = 2$

Induction

$A \Rightarrow B_1$ et B_1 vraie

$A \Rightarrow B_2$ et B_2 vraie

$A \Rightarrow B_3$ et B_3 vraie

donc supposons A .

(Sciences expérimentales)

Induction

$A \Rightarrow B_1$ et B_1 vraie

$A \Rightarrow B_2$ et B_2 vraie donc supposons A.

$A \Rightarrow B_3$ et B_3 vraie

(Sciences expérimentales)

Abduction

$A_1 \Rightarrow B$

$A_2 \Rightarrow B$ et B vraie donc supposons A_1.

$A_3 \Rightarrow B$

(Médecine)

Abduction

$A_1 \Rightarrow B$ et B donc supposons A_1.
$A_2 \Rightarrow B$
$A_3 \Rightarrow B$

(Médecine)

Notion de principe en logique

- Principe de non contradiction
- Principe d'identité $A = B$ $B = C$ alors $A = B = C$
- Principe de vérité Logique floue

Types de raisonnement en logique

Déduction

$A \Rightarrow B$

(Mathématiques)

Induction

$A \Rightarrow B_1$ et B_1 vraie

$A \Rightarrow B_2$ et B_2 vraie

$A \Rightarrow B_3$ et B_3 vraie

donc supposons A .

(Sciences expérimentales)

Induction

$A \Rightarrow B_1$ et B_1 vraie

$A \Rightarrow B_2$ et B_2 vraie donc supposons A.

$A \Rightarrow B_3$ et B_3 vraie

(Sciences expérimentales)

Abduction

$A_1 \Rightarrow B$ et B vraie donc supposons A_1.

$A_2 \Rightarrow B$

$A_3 \Rightarrow B$

(Médecine)

Abduction

$A_1 \Rightarrow B$

$A_2 \Rightarrow B$

$A_3 \Rightarrow B$

et B donc supposons A_1.

(Médecine)

Notion de principe en logique

- Principe de non contradiction
- Principe d'identité
- Principe de vérité

Notion de principe en logique

- Principe de non contradiction
- Principe d'identité
- Principe de vérité

. . .

- Principe de la récurrence

Passer du fini à l'infini

De déductions vers la généralisation

- Principe de non contradiction
- Principe d'identité
- Principe de vérité

...

- <u>Principe de la récurrence</u>

Passer du fini à l'infini
De déductions vers la généralisation

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

Tous les u_n sont divisible par 2

1 Raisonnement par récurrence

Théorème Principe du raisonnement par récurrence

P_n : proposition qui dépend de n

① Initialisation

On montre qu'il existe un entier (par exemple 0) pour lequel c'est vrai

P_0 vraie

P_n : proposition qui dépend de n

① **Initialisation**

On montre qu'il existe un entier (par exemple 0) pour lequel c'est vrai

P_0 vraie

② **Hérédité**

déduction

Fini

étape n

On montre que si la propriété est vraie pour une valeur de n donnée elle est vraie pour $n+1$

déduction
Fini
étape n

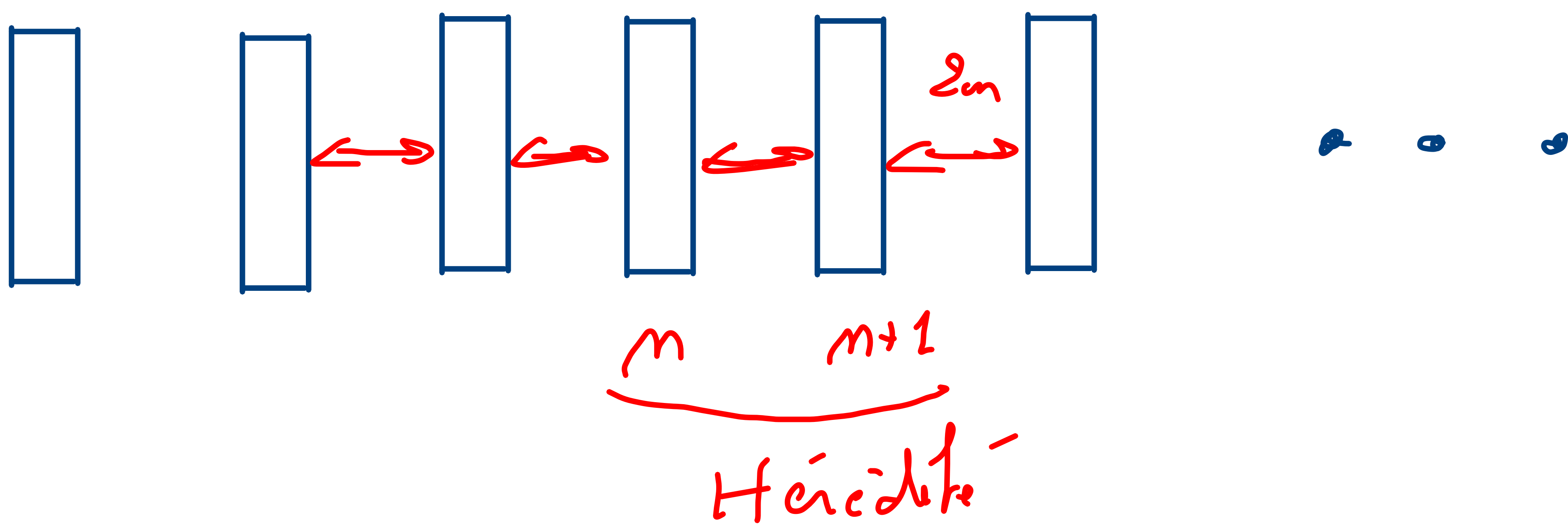
② Hérédité

On montre que si la propriété est vraie pour une valeur de n donnée elle est vraie pour n+1

③ Conclusion

On fait appel au principe de récurrence pour affirmer que P_n vraie quelque soit la valeur de n.

Initialisation



③ Conclusion

On fait appel au principe de récurrence pour affirmer que P_n vraie quelque soit la valeur de n.

Application 1

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

Montrer que cette suite est positive.

Application 1

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Montrer que cette suite est positive.

Soit P_n : " $u_n \geq 0$ "

Initialisation

P_0 : " $u_0 \geq 0$ "

est vraie car $u_0 = 1 \geq 0$

Soit P_n : " $u_n \geqslant 0$ "

Initialisation

P_0 : " $u_0 \geqslant 0$ "

est vraie car $u_0 = 1 \geqslant 0$

Hérédité On suppose que P_n vraie pour une valeur de n donnée : $u_n \geqslant 0$

$\times 2$

$2u_n \geqslant 0$

$+1$

$2u_n + 1 \geqslant 1 \geqslant 0$

$a > b > c$ alors $a > c$

$2u_n + 1 \geqslant 0$

$u_{n+1} = 2u_n + 1$

$u_{n+1} \geqslant 0$

On en déduit que P_{n+1} vraie

Application 2

Soit $u_n : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

$u_0 = 2$

$u_1 = 3$

$u_2 = 5$

$u_3 = 9$

$\ldots$

Montrer que u_n est croissante par récurrence.

Rappel de cours

$(u_n) \nearrow \iff$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$

$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

Rappel de cours

$(u_n) \nearrow \iff$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Application 2

Soit $u_n : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

$u_0 = 2$
$u_1 = 3$
$u_2 = 5$
$u_3 = 9$

Montrer que u_n est croissante par récurrence.

Soit P_n : " $u_{n+1} \geqslant u_n$ "

Initialisation

P_0 : " $u_1 \geqslant u_0$ "

Avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 2u_0 - 1 = 3$

donc P_0 vraie

Soit P_n : " $u_{n+1} \geqslant u_n$ "

$u_n : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

Initialisation P_0 : " $u_1 \geqslant u_0$ "

$2x+3=0$
$-3 \quad -3$

Avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 2u_0 - 1 = 3$

donc P_0 vraie

Hérédité on suppose P_n vraie pour une valeur de n donnée : " $u_{n+1} \geqslant u_n$ "

$\times 2$ $2u_{n+1} \geqslant 2u_n$

-1 $2u_{n+1} - 1 \geqslant 2u_n - 1$

$u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$

P_n : $u_{n+1} \geqslant u_n$

P_{n+1} : $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$

$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 1$

$u_{n+1} = 2u_n - 1$

On en déduit que P_{n+1} vraie

Hérédité : on suppose P_n vraie pour une valeur

de n donnée : "$u_{n+1} \geq u_n$"

$P_n : u_{n+1} \geq u_n$

$P_{n+1} : u_{n+2} \geq u_{n+1}$

$$\times 2 \quad 2u_{n+1} \geq 2u_n$$

$$-1 \quad 2u_{n+1} - 1 \geq 2u_n - 1$$

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 1$$

$$u_{n+1} = 2u_n - 1$$

On en déduit que P_{n+1} vraie

Conclusion : Selon le principe de la récurrence P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc $(u_n) \nearrow$

$u_{n+1} \geq u_n$

Notion de limites (Rappels)

SUITES_GRAPHIQUE_LIMITE_COURS

Suites de référence

$2n \to +\infty$

$n^2 \to +\infty$

$\frac{1}{n} \to 0$

$\sqrt{n} \to +\infty$

Notion de limites

$n \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

<u>Exercice</u>

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3+n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{3} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{3+\frac{1}{n}} = \text{"}\frac{2}{3+0}\text{"} = \frac{2}{3}$$

$$\lim \frac{5+\frac{1}{n}}{1+n} = \text{"}\frac{5+0}{+\infty}\text{"} = \text{"}\frac{5}{+\infty}\text{"} = 0$$

LIMITES_AVEC_SUITES_REFERENCE1
LIMITES_AVEC_SUITES_REFERENCE2
LIMITES_AVEC_SUITES_REFERENCE3
LIMITES_AVEC_SUITES_REFERENCE4

1) $7n - \frac{5}{n} =$ + inf Sol $(+\infty) - 0$

2) $\frac{6}{\sqrt{n}} - 8 =$ -8 Sol

0

3) $\frac{4}{\sqrt{n}} - 5 =$ -5 Sol

4) $\frac{3}{n} - 8 =$ -8 Sol

0

5) $-8n^3 + \frac{2}{n^5} =$ $-$ inf Sol

0

$-\infty$

1) $\frac{16}{\frac{7}{n} - 4} =$ -4 Sol

0

$\frac{16}{-4} = -4$

2) $\frac{4}{n^3 + \sqrt{n}} =$ 0 Sol

$\frac{4}{+\infty + +\infty}$

$+\infty$

3) $\frac{-4}{-4n + \frac{5}{n}} =$ Sol

4) $\frac{9 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^3} =$ Sol

5) $\frac{4 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n} - 2} =$ Sol

1) $\frac{4}{n} - 2 = \boxed{-2}$ ✓ " $0 - 2$ "

2) $-4n^2 + \frac{3}{n^3} = \boxed{-\infty}$ ✓ " $-\infty + 0$ "

3) $-6n + \frac{2}{n} = \boxed{-\infty}$ ✓ " $-\infty + 0$ "

4) $9n - \frac{4}{n} = \boxed{+\infty}$ ✓ " $+\infty - 0$ "

5) $\frac{8}{\sqrt{n}} - 9 = \boxed{-9}$ ✓ " $0 - 9$ "

Exercice (Révision)

1) L'équation $\dfrac{x+11}{6}=\dfrac{7}{16}$

admet pour unique solution Sol

2) L'équation $\dfrac{-7x+5}{4}=\dfrac{11x-8}{5}$

admet pour unique solution Sol

3) L'équation $\left(\dfrac{1}{8}x+3=-\dfrac{1}{3}x\right)\times 8\times 3$

admet pour unique solution Sol

EQUATIONS_FRACTIONS_REVISIONS1
EQUATIONS_FRACTIONS_REVISIONS2

Equations avec fractions

Méthodes

Multiplier pour supprimer les fractions

- $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{3}{5}$

$5\times(x+1)=2\times 3$ ...

- $\left(\dfrac{1}{3}x+1=\dfrac{2}{5}\right)\times 3\times 5$

$15\times\dfrac{1}{3}x+15\times 1=15\times\dfrac{2}{5}$

$5x+15=6$ ...

Application 3

Soit u_n : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 1 \end{cases}$

Montrer par récurrence que pour tout entier n

$$-2 \leq u_n \leq 2$$

(Suite bornée)

Soit P_n : " $-2 \leq u_n \leq 2$ "

Initialisation : P_0 : " $-2 \leq u_0 \leq 2$ " vraie

car $u_0 = 2$

Montrer par récurrence que pour tout entier n

$$-2 \leq u_n \leq 2$$

(Suite bornée)

Soit P_n : " $-2 \leq u_n \leq 2$ "

Initialisation : P_0 : " $-2 \leq u_0 \leq 2$ " vraie

car $u_0 = 2$

Hérédité : Supposons P_n vraie pour n donnée

On en déduit que P_{n+1} vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour n donnée

$$-2 \le u_n \le 2$$

$$\times\tfrac{1}{2} \qquad -1 \le \tfrac{1}{2}u_n \le 1$$

$$-1 \qquad -2 \le \tfrac{1}{2}u_n - 1 \le 0 \le 2$$

$$-2 \le \tfrac{1}{2}u_n - 1 \le 2$$

$$-2 \le u_{n+1} \le 2$$

Transitivité

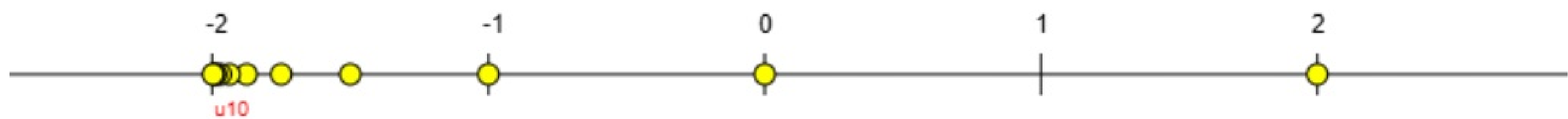
$a \le b \quad b \le c$

alors $a \le c$

On en déduit que P_{n+1} vraie.

Conclusion : D'après le principe de la récurrence P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) bornée



Révision: développer

ExempleS:

a)

$(-2x+1)(-4x+1)$

$= -2x \times (-4x) + (-2x) \times 1 + 1 \times (-4x) + 1 \times 1$

$= 8x^2 - 2x - 4x + 1$

$= 8x^2 - 6x + 1$

b)

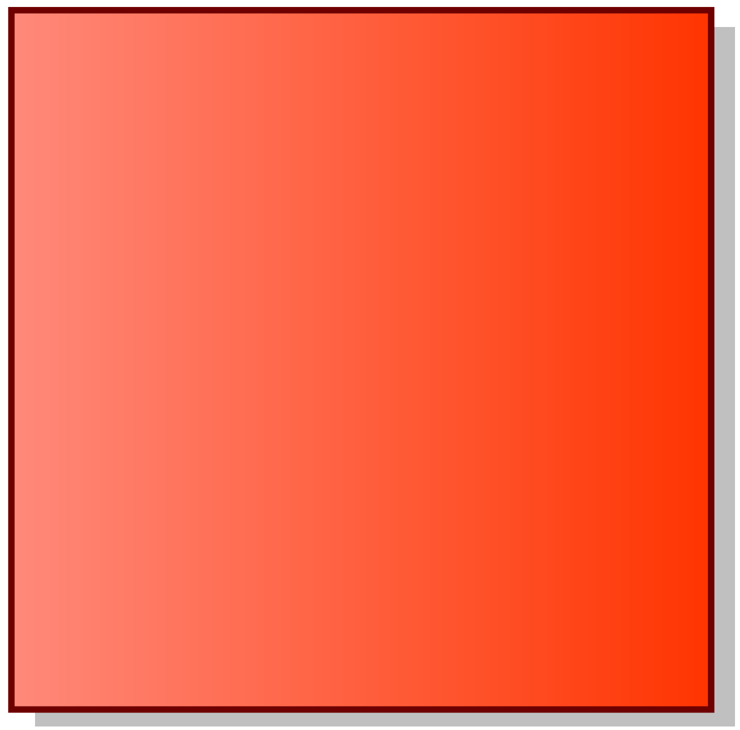
$(2x-1)(-4x-3)$

$= 2x \times (-4x) + 2x \times (-3) - 1 \times (-4x) - 1 \times (-3)$

$= -8x^2 - 6x + 4x + 3$

$= 8x^2 - 2x + 3$

CALC_LITTERAL_DVT1
CALC_LITTERAL_DVT2



Révision: Puissances

1) $12^5 \times 9^2 = 2^{\boxed{10}} \times 3^{\boxed{9}}$

2) $18^{-4} \times 48^{10} = 2^{\boxed{}} \times 3^{\boxed{}}$

3) $\dfrac{8^{-3} \times 24}{54 \times 4^3} = 2^{\boxed{}} \times 3^{\boxed{}}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$(a^n)^p = a^{n \times p}$

$a^n \times a^p = a^{n+p}$

$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

① $12^5 \times 9^2$

$= (2^2 \times 3)^5 \times (3^2)^2$

$= 2^{10} \times 3^5 \times 3^4 = 2^{10} \times 3^9$

② $18^{-4} \times 48^{10} = \dfrac{48^{10}}{18^4}$

$= \dfrac{(2^4 \times 3)^{10}}{(2 \times 3^2)^4} = \dfrac{2^{40} \times 3^{10}}{2^4 \times 3^8}$

$= 2^{36} \times 3^2$

③ $\dfrac{8^{-3} \times 24}{54 \times 4^3} = \dfrac{24}{8^3 \times 54 \times 4^3}$

$= \dfrac{2^3 \times 3}{(2^3)^3 \times (2 \times 3^3) \times (2^2)^3} = \dfrac{2^3 \times 3^1}{2^{16} \times 3^3} = 2^{3-16} \times 3^{1-3}$

$= 2^{-13} \times 3^{-2}$

$2^9 \times 2^1 \times 2^6$

1) $2^{6n} \times 64 = 2^{3\times(?)}$ avec ?= [ ] Sol

2) $5^{4n} \times 25 = 5^{2\times(?)}$ avec ?= [ ] Sol

3) $16 \times 2^{8n} = 2^{4\times(?)}$ avec ?= [ ] Sol

4) $49 \times 7^{4n} = 7^{2\times(?)}$ avec ?= [ ] Sol

5) $256 \times 2^{8n} = 2^{4\times(?)}$ avec ?= [ ] Sol

6) $125 \times 5^{6n} = 5^{3\times(?)}$ avec ?= [2n+1] Sol

PUISSANCES_REVISION1
PUISSANCES_REVISION2

1) $\mathbf{2^{6n} \times 64} = 2^{3\times(?)}$ avec ?= [ ] Sou

2) $\mathbf{5^{4n} \times 25} = 5^{2\times(?)}$ avec ?= [ ] Sou

3) $\mathbf{16 \times 2^{8n}} = 2^{4\times(?)}$ avec ?= [ ] Sou

4) $\mathbf{49 \times 7^{4n}} = 7^{2\times(?)}$ avec ?= [ ] Sou

5) $\mathbf{256 \times 2^{8n}} = 2^{4\times(?)}$ avec ?= [ ] Sou

6) $\mathbf{125 \times 5^{6n}} = 5^{3\times(?)}$ avec ?= [2n+1] Sou

Application 4

"4 divise $5^n - 1$"

$n = 0$: $5^0 = 1 \rightarrow 5^0 - 1 = 0 = 0 \times 4$

$n = 1$: $5^1 = 5 \rightarrow 5^1 - 1 = 4 = 1 \times 4$

$n = 2$: $5^2 = 25 \rightarrow 5^2 - 1 = 24 = 6 \times 4$

$n = 3$ $5^3 = 125 \rightarrow 5^3 - 1 = 124 = 31 \times 4$

La formule est-elle toujours VRAIE ?

$n=0$: $5^0 = 1 \rightarrow 5^0 - 1 = 0 = 0 \times 4$

$n=1$: $5^1 = 5 \rightarrow 5^1 - 1 = 4 = 1 \times 4$

$n=2$: $5^2 = 25 \rightarrow 5^2 - 1 = 24 = 6 \times 4$

$n=3$ $5^3 = 125 \rightarrow 5^3 - 1 = 124 = 31 \times 4$

La formule est-elle toujours VRAIE ?

Soit $P(n)$: " 4 divise $5^n - 1$ "

pour $n \in \mathbb{N}$ donné.

Soit $\mathcal{P}(n)$: " 4 divise $5^n - 1$ "

pour $n \in \mathbb{N}$ donné.

1 Initialisation $n \in \mathbb{N}$, le premier terme est $n = 0$

$\mathcal{P}(0)$: " 4 divise $5^0 - 1$ "

On a $5^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 4$ (4 divise $5^0 - 1$)

Donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$

(1) Initialisation $n \in \mathbb{N}$, le premier terme est $n = 0$

$\mathcal{P}(0)$: " 4 divise $5^0 - 1$ "

On a $5^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 4$ (4 divise $5^0 - 1$)

Donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$

(2°) Hérédité On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour une valeur de n donnée

2° Hérédité : On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour une valeur de n donnée : 4 divise $5^n - 1$

Il existe $k \in \mathbb{N}$ $\left(5^n - 1 = 4k\right) \times 5$

$5^n \times 5 = 5^{n+1}$

$20k + 4 = 4 \times \boxed{5k} + 4 \times 1$

$5^{n+1} - 5 = 20k$

$5^{n+1} - 1 - 4 = 20k$

$5^{n+1} - 1 = 20k + 4 = 4(5k+1)$

Il existe $k' = 5k + 1$ $\quad 5^{n+1} - 1 = 4k'$

4 divise $5^{n+1} - 1$

On obtient $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie

② <u>Hérédité</u> On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour une valeur de n donnée : 4 divise $5^n - 1$

Il existe $k \in \mathbb{N}$ $(5^n - 1 = 4k) \times 5$

$5^n \times 5 = 5^{n+1}$

$5^{n+1} - 5 = 20k$

$5^{n+1} - 1 - 4 = 20k$

$5^{n+1} - 1 = 20k + 4 = 4(5k+1)$

$20k + 4 = 4 \times \boxed{5k} + 4 \times \boxed{1}$

$\exists$ Il existe $k' = 5k + 1$ $\quad 5^{n+1} - 1 = 4k'$

4 divise $5^{n+1} - 1$

On obtient $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie

③ <u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

pour tout

Propriété Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1+na$

$(1+a)^n \geqslant 1+na$

$n = 0$	$(1+a)^0 \geqslant 1 + 0 \times a$ $1 \geqslant 1$
$n = 1$	$(1+a)^1 \geqslant 1 + 1 \times a$ $1+a \geqslant 1+a$
$n = 2$	$(1+a)^2 \geqslant 1 + 2 \times a$ $1+2a+a^2 \geqslant 1+2a$

Propriété Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Preuve par récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $(1+a)^n \geq 1 + na$ "

où $a \in \mathbb{R}_*^+$ $a \in]0 ; +\infty[$ $* \neq 0$

Initialisation $n = 0$

$P(0)$: " $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$ "

$x > 0$

$x^0 = 1$

$P(0)$: " $1 \geq 1$ " donc $\boxed{P(0) \text{ vraie}}$

Initialisation $n = 0$

$\mathcal{P}(0)$: " $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0 \times a$ "

$\boxed{\begin{array}{l} x > 0 \\ x^0 = 1 \end{array}}$

$\mathcal{P}(0)$: " $1 \geqslant 1$ " donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ vraie}}$

Hérédité On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour une valeur donnée de $n \in \mathbb{N}$

Hérédité On suppose $P(n)$ vraie pour une valeur donnée de $n \in \mathbb{N}$

$$\left[(1+a)^n \geq 1+na\right] \times (1+a) \geq 0$$

Car

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na) \times (1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq \boxed{1+a+na} + na^2 \geq 1+a+na$$

$$(1+a)^{n+1} \geq \boxed{1+na+a}$$ (transitivité)

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

On en déduit que P_{n+1} vraie.

$$\begin{cases} u_0 = 560 \\ u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 500 \end{cases}$$

① Suite auxiliaire

(*) $v_n = u_n - 5000$

On montre que $v_n = v_0\, q^n$
(q est à calculer)

② On remplace dans (*)

$v_0\, q^n = u_n - 5000$

$$\boxed{u_n = v_0\, q^n + 5000}$$

On obtient donc une formule explicite de la suite u_n

Utilisation de python (liens)

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_{n+1} = \frac{4v_n + 4}{3 + v_n} \text{ et } v_0 = -14.$$

```
v(10)
                2.561560167
```

Programme 1: suites avec while

```
def v(n):
    vAUX=-14
    nAUX=0
    while nAUX<n:
        vAUX=(4*vAUX+4)/(3+vAUX)
        nAUX=nAUX+1
    return vAUX
print(v(10))
```

Exécuter | Python | Javascript | Share code

```
2.5615601670637442
```

Voir lien PYTHON

Point faible :

Si erreur de programmation, risque d'une boucle infinie avec "While"

Programme 1: suites avec while

```
def v(n):
    vAUX=-14
    nAUX=0
    while nAUX<n:
        vAUX=(4*vAUX+4)/(3+vAUX)
        nAUX=nAUX+1
    return vAUX
print(v(10))
```

Exécuter | Python | Javascript | Share code

```
2.5615601670637442
```

voir lien PYTHON

Point faible : si erreur de programmation, risque d'une boucle infinie avec "while"

Programme 2: range (lien)

range (2, 7) → produire une liste de 7−2 = 5 valeurs

→ On commence par 2.

{ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }

Suivi d'un programme :

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_{n+1} = \frac{4v_n + 4}{3 + v_n} \text{ et } v_0 = -14.$$

```python
def v(n):
    vAUX=-14
    nAUX=0
    while nAUX<n:
        vAUX=(4*vAUX+4)/(3+vAUX)
        nAUX=nAUX+1
    return vAUX
print(v(10))
```

nAUX	vAUX
0	-14
1	...
2	
9	
n 10	...

Méthode: suites arithmetico-géométriques

Exercice2(16pts)

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement.
À la fin 2016, le réseau compte exactement 560 personnes abonnées.
L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 10% des anciens abonnés ne se réabonnent pas, et que 500 nouvelles personnes s'abonnent.
On note u_n le nombre d'abonnés sur la plateforme en $2016 + n$.

(a) Combien y aura-t-il d'abonnés en 2017 ?

(b) Donner la valeur de u_0 et u_1.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.9u_n + 500$.

(d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5000$.
Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.

(e) Déterminer la valeur de v_0.

(f) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

(g) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

(h) Combien d'abonnés l'administrateur prévoit-il en 2045 avec ce modèle?

$$\begin{cases} u_0 = 560 \\ u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 500 \end{cases}$$

① Suite auxiliaire

(∗) $v_n = u_n - 5000$

On montre que $v_n = v_0\, q^n$ (q est à calculer) $v_{n+1} = q\, v_n$

② On remplace dans (∗)

$v_0\, q^n = u_n - 5000$

$u_n = v_0\, q^n + 5000$

Programme 1 et 2 avec affichage de chaque termes

```
def v(n):
    vAUX=-14
    for i in range(1,n+1):
        vAUX=(4*vAUX+4)/(3+vAUX)
        print("v("+str(i)+")="+str(vAUX))
    return vAUX
print(v(10))
```

```
def v(n):
    vAUX=-14
    for i in range(1,n+1):
        vAUX=(4*vAUX+4)/(3+vAUX)
        print("v("+str(i)+")="+str(vAUX))
    return vAUX
print(v(10))
```

Ex 110 p

110 Carole et Nicolas font un tournoi de 5 mini-jeux sur un jeu vidéo. Carole obtient un score de 5 000 et Nicolas un score de 3 500. Nicolas décide alors de s'entraîner chaque semaine pour battre le record de Carole. Chaque semaine, il améliore son score de 5 %. Au bout de combien de semaines battra-t-il le record de Carole ?

Programmer cette suite avec python (lien EX110)

```
n=0
u=?
while u<?:
    u=?*u
    n=n+1
print(n)
```

Rappels

$\nearrow t\,\% \iff \times\left(1+\frac{t}{100}\right)$

$\searrow t\,\% \iff \times\left(1-\frac{t}{100}\right)$

Exemples : $\searrow 15\,\%$ revient à $\times\, 0{,}85$ $\quad \times\left(1-\frac{15}{100}\right)$

$\nearrow 20\,\%$ revient à $\times\, 1{,}2$ $\quad \times\left(1+\frac{20}{100}\right)$

Modélisation : Soit (u_n) le score de Nicolas au bout de n semaines

Exercice 1

Suite arithmétique

(u_n) est une suite arithmétique de raison r = -4.5 et de premier terme u_0=-4

En utilisant une formule du cours, la somme des 25 premiers termes de la suite est:

$u_0 + u_1 + ... + u_{25} =$?

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + (-4,5) \end{cases}$$ récurrence

$$u_n = -4 + n \times (-4,5)$$ explicite

$$(u_n) \quad \begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + (-4,5) \end{cases}$$

récurrence

$$u_n = -4 + n \times (-4,5)$$

explicite

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{25} \qquad \sum_{i=0}^{25} u_i$$

$$= \boxed{-4 + 0 \times (-4,5)} + \boxed{-4 + 1 \times (-4,5)} + \boxed{-4 + 2 \times (-4,5)} + \dots + \boxed{-4 + 25 \times (-4,5)}$$

$$= -4 \times 26 + \boxed{0} \times (-4,5) + \boxed{1} \times (-4,5) + \boxed{2} \times (-4,5) + \dots + \boxed{25} \times (-4,5)$$

$$= -104 + (0 + 1 + 2 + \dots + 25) \times (-4,5)$$

(Factorisation par $-4,5$)

SUITEPB1.html
SUITEPB2.html

$$= -4\times 26 + 0\times(-4,5) + 1\times(-4,5) + 2\times(-4,5) + \dots + 25\times(-4,5)$$

$$= -104 + (0+1+2+\dots+25)\times(-4,5)$$

$$\boxed{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= -104 + (0+1+2+\dots+25)\times(-4,5)$$

$$= -104 + \frac{25\times 26}{2}\times(-4,5)$$

$$= -1566,5$$

SUITES_ARITH_GEO

		B	C
		-4	
		-8,5	
3	u2	-13	
4	u3	-17,5	
5	u4	-22	
6	u5	-26,5	
7	u6	-31	
8	u7	-35,5	
9	u8	-40	
10	u9	-44,5	
11	u10	-49	
12	u11	-53,5	
13	u12	-58	
14	u13	-62,5	
15	u14	-67	
16	u15	-71,5	
17	u16	-76	
18	u17	-80,5	
19	u18	-85	
20	u19	-89,5	
21	u20	-94	
22	u21	-98,5	
23	u22	-103	
24	u23	-107,5	
25	u24	-112	
26	u25	-116,5	
27			-1566,5

2 Limite d'une suite

SUITES_GRAPHIQUE_LIMITE_COURS

SUITES_PROG_GRAPH_COURS

2 Limite d'une suite

Définition Suite divergeant vers l'infini

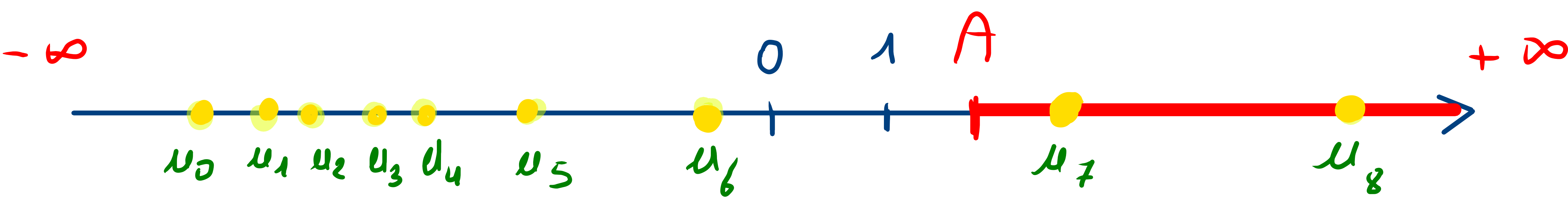
• On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **diverge** et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Définition Suite divergeant vers l'infini

• On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

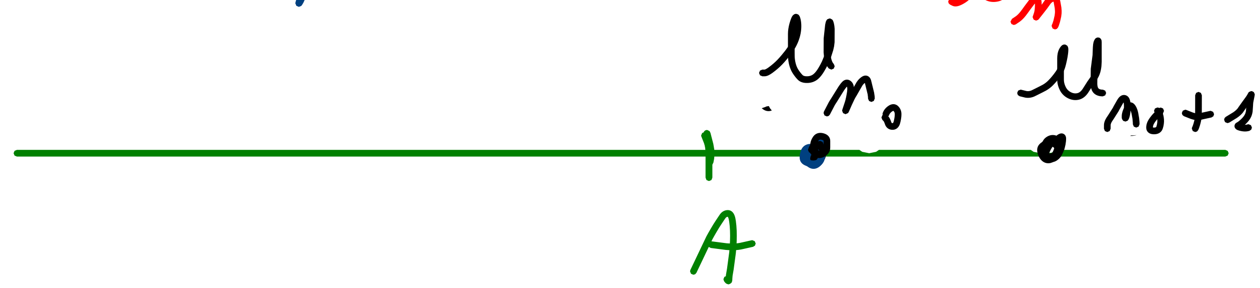
On dit que (u_n) **diverge** et on note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$



Application : Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

u_n

Soit $A>0$:



$u_n > A \iff n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$ (car $A>0$)

Soit n_0 le premier entier supérieur à $\sqrt{A}$ $(n > n_0 > \sqrt{A})$

Alors à partir de n_0, $u_n > A$

$A = 20$

$\sqrt{A} = 4{,}47\ldots$

$n_0 = 5$

$u_0 = 0$ $\quad u_4 = 16$

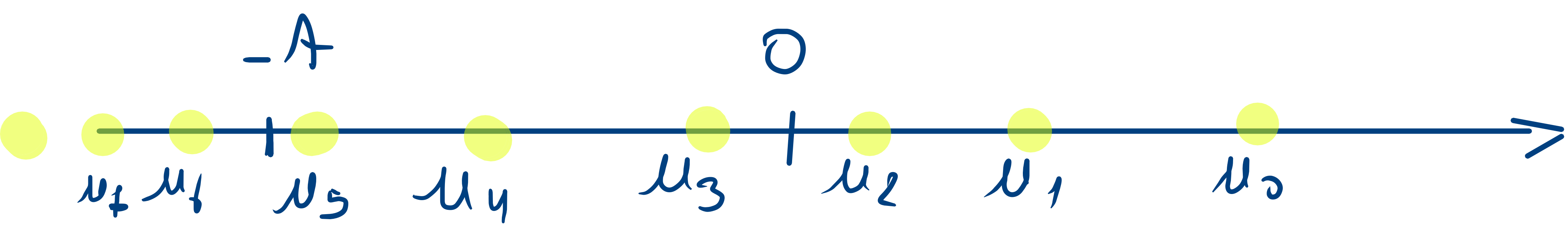
$u_1 = 1$ $\quad u_5 = 25$

$u_2 = 4$

$u_3 = 9$

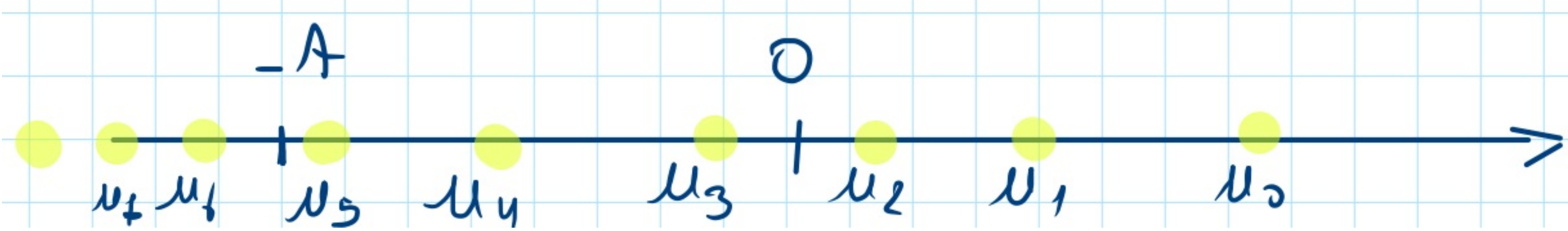
• On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]-\infty\,;-A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **diverge** et on note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty.}$



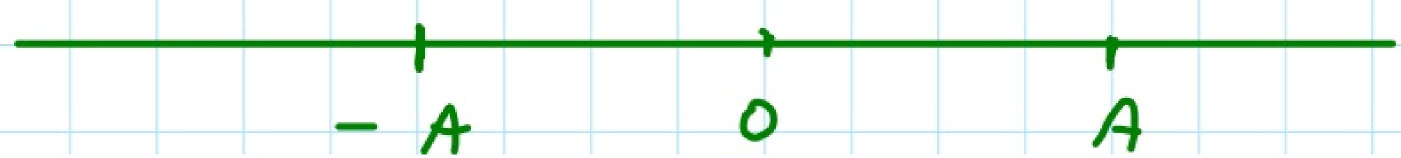
• On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]-\infty\,; -A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **diverge** et on note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.



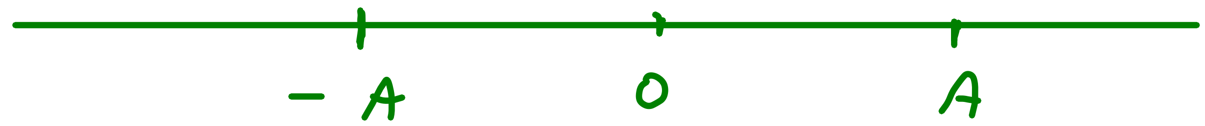
<u>Application</u> : Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{-3n}_{u_n} = -\infty$

Soit $A > 0$:



__Application :__ Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{-3n}_{u_n} = -\infty$

Soit $A > 0$:



$$u_n < -A \iff -3n < -A \iff n > \frac{-A}{-3}$$

$$\iff n > \frac{A}{3}$$

$\left(n > n_0 > \frac{A}{3}\right)$ Soit n_0 le premier nombre entier supérieur à $\frac{A}{3}$

Alors à partir de n_0 $(n > n_0)$, $u_n < -A$.

Définition Suite convergeant vers un nombre réel

On dit que la suite (u_n) tend vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. (n_0)

On dit que (u_n) converge et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

$\left]\ell - \varepsilon \,;\, \ell + \varepsilon\right[$

$\left]\ell - 0{,}1 \,;\, \ell + 0{,}1\right[$

$\left]\ell - 0{,}01 \,;\, \ell + 0{,}01\right[$

Exemple

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 2 = 2$$

$\left]1{,}9 \,;\, 2{,}1\right[$

Visualisation

SUITES_GRAPHIQUE_LIMITE_COURS.html

SUITES_PROG_GRAPH_COURS

Observer le comportement des suites suivantes:

u est la suite définie par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

u est la suite définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

u est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$

u est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -\dfrac{3}{2}u_n + 1$

u est la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$

Propriété Limite des suites de référence

Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$(u_n + v_n)$ a pour limite	$(u_n \times v_n)$ a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
	0^-	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
0	0	indéterminée

3 Propriétés des limites

Propriété Limite des suites de référence

Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Problème : $u_n = n^3 + \frac{1}{n}$ (Rédiger la preuve)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array}\right\}$ D'après les théorèmes d'opérations :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$=$ " $(+\infty) + 0$ "

P20

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$(u_n + v_n)$ a pour limite	$(u_n \times v_n)$ a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
	0^-	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
0	0	indéterminée $\frac{0}{0}$

Les formes indéterminées

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$(u_n + v_n)$ a pour limite	$(u_n \times v_n)$ a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
$\ell \neq 0$	0^-	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
0	0	indéterminée

Voici Trois suites :

$u_n = \frac{n^2}{n+1}$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$

$\lim u_n = +\infty$

$v_n = \frac{2n+4}{n^2+1}$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$

$\lim u_n = 0$

$w_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$

$\lim u_n = 1$

Exercice

Dans les exercices suivant, donner les limites des opérations proposées.
On notera "inf" pour l'infini et "FI" pour forme indéterminée.

1) $8 \times (-\infty)=$

2) $(+\infty) \times (-\infty)=$

3) $\dfrac{-\infty}{-\infty}=$

4) $\dfrac{-\infty}{0^-}=$

5) $-3 + (-\infty)=$

6) $(-\infty) \times (+\infty)=$

7) $\dfrac{5}{+\infty}=$

8) $3 + (+\infty)=$

9) $(+\infty) + (-\infty)=$

10) $7 + (-\infty)=$

SUITES_LIMITES_CALC_RAPIDE0a
SUITES_LIMITES_CALC_RAPIDE0b
SUITES_LIMITES_CALC_RAPIDE0c

Comment lever une indétermination

$$u_n = \frac{n^2}{n+1}$$

① $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}$

C'est une forme Indéterminée

(F. I.)

$$v_n = \frac{2n+4}{n^2+1}$$

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$n+1 = n \times 1 + n \times \frac{1}{n}$$

$$w_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$$

C'est une forme indéterminée (F. I.)

$v_n = \dfrac{2n+4}{n^2+1}$

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2 \; \cancel{n} \times n}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \boxed{\frac{n}{1+\frac{1}{n}}}$$

$w_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$

$n+1 = n\times 1 + n \times \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = \text{“}\frac{+\infty}{1+0}\text{”} = \boxed{+\infty}$$

par théorèmes d'opérations sur les limites.

② $\lim v_n = \lim \dfrac{2n+4}{n^2+1}$

$$n+1 = n \times 1 + n \times \frac{1}{n}$$

n^2+2

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = \text{“}\frac{+\infty}{1+0}\text{”} = \boxed{+\infty}$$

par théorèmes d'opérations sur les limites.

② $\lim v_n = \lim \frac{2n+4}{n^2+1} = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}$ est une F.I.

$$\frac{2n+4}{n^2+1} = \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{4}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$\cancel{n} \times n$

$$\lim v_n = \lim \frac{1}{n} \times \frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \text{“}0 \times \frac{2+0}{1+0}\text{”} = \text{“}0 \times 2\text{”} = 0$$

Par théorème d'opérations sur les limites

② $\lim v_n = \lim \dfrac{2n+4}{n^2+1} =$ " $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ " est une F.I.

$$\frac{2n+4}{n^2+1} = \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{4}{n}\right)}{\underbrace{n^2}_{\cancel{n}\times n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{4}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim v_n = \lim \frac{1}{n} \times \frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \text{“ } 0 \times \frac{2+0}{1+0} \text{ ”} = \text{“ } 0 \times 2 \text{ ”} = 0$$

Par théorème d'opérations sur les limites

③ $\lim w_n = \lim \dfrac{n^2+1}{n^2+2} = \dots$ F.I.

$$\frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim v_n = \lim \frac{1}{n} \times \frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \text{“}\, 0 \times \frac{2+0}{1+0} \,\text{”} = \text{“}\, 0 \times 2 \,\text{”} = 0$$

Par théorèmes d'opérations sur les limites

③ $\lim w_n = \lim \dfrac{n^2+1}{n^2+2} = \dots$ F.I.

$$\frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim w_n = \lim \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \text{“}\, \frac{1+0}{1+0} \,\text{”} = 1$$

par théorèmes d'opérations.

④ $t_n = 3n^2 - 2n$

③ $\lim w_n = \lim \dfrac{n^2+1}{n^2+2} = \ldots$ F.I.

$$\frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim w_n = \lim \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \text{“}\frac{1+0}{1+0}\text{”} = 1$$

par Théorèmes d'opérations.

④ $t_n = 3n^2 - 2n$

$\lim t_n =$ “$(+\infty) - (+\infty)$” est une $\underline{\text{F.I}}$

$$3n^2 - 2n = n^2\left(3 - \frac{2n}{n^2}\right) =$$

④ $t_n = -3n^2 - 2n$

$\lim t_n =$ "$(+\infty) - (+\infty)$" est une F. I

$-3n^2 - 2n = n^2\left(-3 - \frac{2n}{n^2}\right) = n^2\left(-3 - \frac{2}{n}\right)$

$\frac{2n}{n^2} = \frac{2 \times \cancel{n}}{n \times \cancel{n}} = \frac{2}{n}$

$\lim t_n = \lim n^2\left(-3 - \frac{2}{n}\right) =$ "$(+\infty) \times (-3 - 0)$"

$= -\infty$

Par théorèmes d'opérations.

② $\lim v_n = \lim \frac{2n+4}{n^2+1} = $ " $\frac{+\infty}{+\infty}$ " est une F.I.

$$\frac{2n+4}{n^2+1} = \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{4}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$\cancel{n} \times n$

$$\lim v_n = \lim \frac{2+\frac{4}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \text{"}\frac{2+0}{(+\infty)\times(1+0)}\text{"} = \text{"}\frac{2}{+\infty}\text{"} = 0$$

car $\lim n^2 = +\infty$ et par théorèmes d'opérations sur les limites "

③ $\lim w_n = \lim \frac{n^2+1}{n^2+2}$ . . . F.I.

$$w_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$$

$$\frac{n^2+1}{n^2+2} =$$

③ $\lim w_n = \lim \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$ ... F.I.

$$w_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$$

$$\frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$\lim w_n = \lim \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \text{"}\,\frac{1+0}{1+0}\,\text{"} = 1$$

④ $t_n = 2n^2 - 3n$

$\lim t_n =$ "$(+\infty) - (+\infty)$" est une F.I.

4) $t_n = -2n^2 - 3n$

$\lim t_n =$ " $(+\infty) - (+\infty)$ " est une F.I.

$$-2n^2 - 3n = n^2\left(-2 - \frac{3\cancel{n}}{n^2}\right) = n^2\left(-2 - \frac{3}{n}\right)$$

$n^2 = \cancel{n} \times n$

$$\lim t_n = \lim n^2\left(2 - \frac{3}{n}\right) = \text{“}(+\infty) \times (-2 - 0)\text{”}$$

$$= -\infty$$

SUITES_LIMITES_AVEC_FI1

SUITES_LIMITES_AVEC_FI2

Limites de suites, avec F.I. (1)

CHRONOMETRE

Exercice: déterminer une limite

Après avoir complété la transformation permettant de lever l'indétermination, donner la limite des suites suivantes ($+\infty$ se notera "+inf" et $-\infty$ se notera "-inf"). Toutes les fractions seront **simplifiées** et notée "a/b", $-2n^2$ se notera "-2n^2".

$$\frac{n^6\left(4-\frac{4n}{n^6}\right)}{n^7\left(7-\frac{6}{n^7}\right)} \qquad \frac{n^6}{n^7}=\frac{1}{n} \qquad \frac{4n}{n^6}=\frac{4}{n^5} \qquad \frac{\cancel{n^6}\,1}{\cancel{n^6}\times n}$$

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^6-4n}{7n^7-6} = \lim\limits_{n\to+\infty}$ 1/n $\times \dfrac{4-\dfrac{4}{n^5}}{7-\dfrac{6}{n^7}} =$ 0

(JUSTIFICATION: 0 $\times$ 4/7)

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-5n^6+4n}{8n^5-10} = \lim\limits_{n\to+\infty}$ ______ $\times \dfrac{-5+\dfrac{4}{n^5}}{8-\dfrac{10}{n^5}} =$ ______

(JUSTIFICATION: ______ $\times$ ______)

Révisions: inéquations (A LA MAIN)

INEQUATIONS_REVISIONS1.html

Exercice

Soyez vigilant aux changements de sens de l'inégalité:
en multipliant ou en divisant par un nombre non nul et négatif, **le sens de l'inégalité change**.

1) L'inéquation $\frac{2}{3}x+6 \geqslant \frac{5}{3}x+9$ admet pour ensemble de solution S=

]-∞;-3] ✓

2) L'inéquation $\frac{-3}{4}x-7 > \frac{-7}{4}x-15$ admet pour ensemble de solution S=

]-8;+∞[✓

3) L'inéquation $\frac{3}{2}x+6 > 2x+2$ admet pour ensemble de solution S=

]-∞;8[✓

4) L'inéquation $\frac{-4}{3}x-8 \leqslant \frac{1}{6}x-14$ admet pour ensemble de solution S=

[4;+∞[✓

$$\left(\frac{2}{3}x+6 \geqslant \frac{5}{3}x+9\right) \times 3$$

$$\frac{3}{1}\times\frac{2}{3}x+3\times 6 \geqslant \frac{3}{1}\times\frac{5}{3}x+3\times 9$$

$$2x+18 \geqslant 5x+27$$
$$-18 \qquad\qquad -18$$

$$2x \geqslant 5x+9$$
$$-5x \qquad -5x$$

$$-3x \geqslant 9$$

$$\left(\frac{2}{3}x + 6 \geq \frac{5}{3}x + 9\right) \times 3$$

$$\frac{3}{1} \times \frac{2}{3}x + 3 \times 6 \geq \frac{3}{1} \times \frac{5}{3}x + 3 \times 9$$

$$2x + 18 \geq 5x + 27$$
$$-18 \qquad\qquad -18$$

$$2x \geq 5x + 9$$
$$-5x \qquad\quad -5x$$

$$-3x \geq 9$$

$$x > -1$$

$]-1 ; +\infty[$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{9}{-3}$$

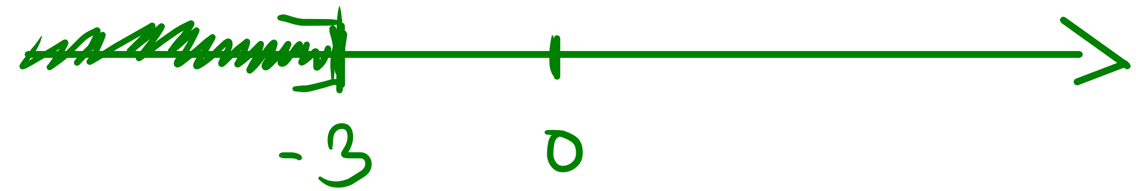
changer le signe

si $a < 0$

$a = -3$

$$x \leq -3$$

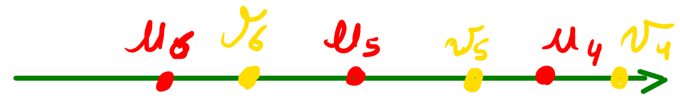
$$S =]-\infty ; -3]$$



$$\left(\frac{1}{3}x + 1 \leq \frac{3}{5}x + 2\right) \times 15$$

SUITES_LIMITES_AVEC_FI2
SUITES_LIMITES_AVEC_FI3

4 Limite et comparaison



Théorème Théorème de comparaison

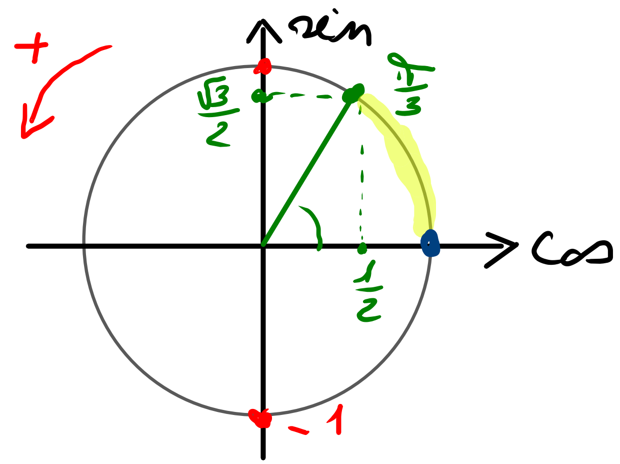
Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Applications

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$



• $u_n = \underbrace{n}_{+\infty} + 2 \times \sin(n)$

On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

$-2 \leq 2\times\sin(n) \leq 2$

$+n \quad +n$

$n - 2 \leq n + 2\sin(n) \leq n + 2$

$$-2 \leq 2\sin(n) \leq 2$$

$+n$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+n$

$$\underbrace{n-2}_{+\infty} \leq \underbrace{n+2\sin(n)}_{\text{poussé vers } +\infty} \leq n+2$$

$$\lim (n-2) = +\infty \quad \text{et} \quad u_n \geq n-2$$

Par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2°

$$v_n = \underbrace{\underbrace{-n^2}_{-\infty} \underbrace{-n}_{-\infty}}_{-\infty} + \underbrace{(-1)^n}_{\text{? Pas de limite}}$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \qquad + (-n^2 - n)$$

$$\underbrace{-n^2 - n - 1}_{-\infty} \leq \underbrace{-n^2 - n + (-1)^n}_{v_n \text{ est "poussée"}} \leq \underbrace{-n^2 - n + 1}_{-\infty}$$

vers $-\infty$ par $-n^2 - n + 1$

2°

$$v_n = \underbrace{\underbrace{-n^2}_{-\infty} \underbrace{-n}_{-\infty}}_{-\infty} + \underbrace{(-1)^n}_{?}$$

$(-1)^0 = 1$

$(-1)^1 = -1$

$(-1)^2 = 1$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\underbrace{-n^2 - n - 1}_{-\infty} \leq \underbrace{-n^2 - n + (-1)^n}_{v_n \text{ est "poussée"}} \leq \underbrace{-n^2 - n + 1}_{-\infty}$$

vers $-\infty$ par $-n^2 - n + 1$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2 - n + 1) = -\infty$

D'après les théorèmes de comparaison

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty.$$

$$\underbrace{-n^2-n-1}_{-\infty} \le \underbrace{-n^2-n+(-1)^n}_{v_n \text{ est "poussée"}} \le \underbrace{-n^2-n+1}_{-\infty}$$

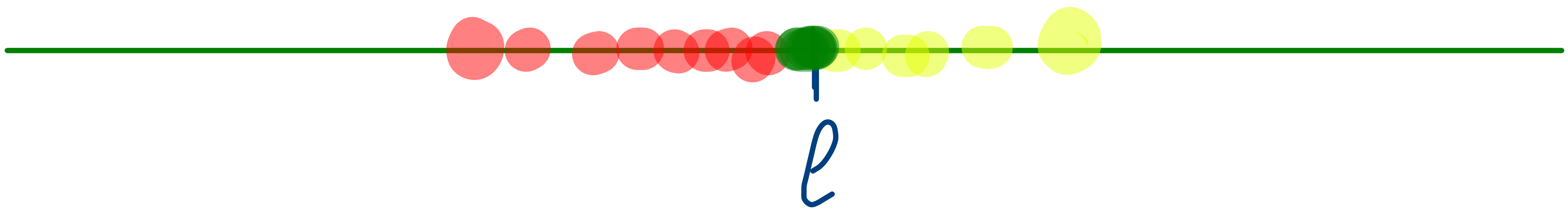
vers $-\infty$ par $-n^2-n+1$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2-n+1) = -\infty$

D'après les théorèmes de comparaison

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty .$$

$$v_n \le t_n \le u_n$$



Théorème Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ un réel.

On suppose que :

- il existe un entier naturel n_0,

tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$

Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Application $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

<u>Application</u> $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{3 + \frac{-1}{n}}_{\substack{3 \\ \text{gendarme}}} \leq \underbrace{3 + \frac{(-1)^n}{n}}_{\substack{\text{voleur} \\ \to 3}} \leq \underbrace{3 + \frac{1}{n}}_{\substack{3 \\ \text{gendarme}}}$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \frac{-1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3$

D'après le th. des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

$$\underbrace{3+\frac{-1}{n}}_{\substack{3 \\ \text{gendarme}}} \leq \underbrace{3+\frac{(-1)^n}{n}}_{\substack{\text{voleur} \\ \to 3}} \leq \underbrace{3+\frac{1}{n}}_{\substack{3 \\ \text{gendarme}}}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n} = 3$

D'après le th. des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

5 Suites géométriques et suites monotones

Propriété Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel. (raison q)

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

SUITES_GRAPHIQUE_LIMITE_COURS

5 Suites géométriques et suites monotones

Propriété Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel. (raison q)

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemples

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}1^n = 0$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2)^n = ?$

$(-2)^0 = 1$

$(-2)^1 = -2$

$(-2)^2 = 4$

$(-2)^3 = -8$

Il n'y a pas de limite

Exercices

Donner la limite des suites suivantes ($+\infty$ se notera "+inf" et $-\infty$ se notera "-inf"):

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\times \overset{0}{0.6^n} - 1 = \boxed{-1}$ Sou

$-3\times 0-1$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{-5\times \overset{+\infty}{8^n}+1}_{-\infty} = \boxed{-\infty}$ Sou

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} -4\times 0.3^n = \boxed{0}$ Sou

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times \overset{+\infty}{6^n} - 4 = \boxed{+\infty}$ Sou

Exercice

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-5-3^n}{4^n-5} \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$-5-3^n = \frac{-5}{3^n} \times 3^n - 1 \times 3^n$$

c'est une F. I. du type " $\frac{-\infty}{+\infty}$ "

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-5-3^n}{4^n-5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n\left(-\frac{5}{3^n}-1\right)}{4^n\left(1-\frac{5}{4^n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{-\frac{5}{3^n}-1}{1-\frac{5}{4^n}}$$

Lever l'indétermination

C'est une F. I. du type " $\frac{-\infty}{+\infty}$ "

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-5-3^n}{4^n-5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n\left(-\frac{5}{3^n}-1\right)}{4^n\left(1-\frac{5}{4^n}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{-\frac{5}{3^n}-1}{1-\frac{5}{4^n}} \qquad \frac{-1}{1}$$

Lever l'indétermination

$$= \text{"} \ 0 \times -1 \ \text{"}$$

$$= 0$$

② $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{7 \times 5^n}_{(+\infty)} - \underbrace{4 \times 6^n}_{(+\infty)}$

On a une F.I. du type "$(+\infty) - (+\infty)$"

$$7 \times 5^n - 4 \times 6^n = 6^n \left(\frac{7 \times 5^n}{6^n} - 4 \right)$$

$$= 6^n \left(7 \times \left(\frac{5}{6} \right)^n - 4 \right)$$

$\lim 6^n \times \left(7 \times \left(\frac{5}{6} \right)^n - 4 \right) =$ "$(+\infty) \times (7 \times 0 - 4)$"

$=$ "$(+\infty) \times (-4)$" $= -\infty$

SUITES_GEO_LIMITES1

SUITES_GEO_LIMITES2

SUITES_LIMITES_GEO_AVEC_FI1
SUITES_LIMITES_GEO_AVEC_FI2

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-5-3^n}{4^n-5} = \left(\boxed{3/4}\right)^{n}$? $\times \dfrac{\dfrac{-5}{3^n}-1}{1-\dfrac{5}{4^n}} = \boxed{0}$?

(JUSTIFICATION: $\boxed{0}$? $\times$ $\boxed{-1}$?)

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 7\times 5^n - 4\times 6^n = \boxed{}^{n}$? $\times\left(7\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - 4\right) = \boxed{}$?

(JUSTIFICATION: $\boxed{}$? $\times$ $\boxed{}$?)

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-8-7^n}{3^n-4} = \left(\boxed{}\right)^{n}$? $\times \dfrac{\dfrac{-8}{7^n}-1}{1-\dfrac{4}{3^n}} = \boxed{}$?

(JUSTIFICATION: $\boxed{}$? $\times$ $\boxed{}$?)

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{-8-7^n}{3^n-4} = (\boxed{7/3})^n \times \frac{\frac{-8}{7^n}-1}{1-\frac{4}{3^n}} = \boxed{-\infty}$

(JUSTIFICATION: $\boxed{+\infty}$ $\times$ $\boxed{-1}$)

$$\lim \frac{-8-7^n}{3^n-4} \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\frac{-8-7^n}{3^n-4} = \frac{7^n\left(-\frac{8}{7^n}-1\right)}{3^n\left(1-\frac{4}{3^n}\right)}$$

$$= \left(\frac{7}{3}\right)^n \times \frac{-\frac{8}{7^n}-1}{1-\frac{4}{3^n}} \longrightarrow +\infty \times \frac{-1}{1}$$

SUITES_LIMITES_SANS_FI

Limites de suites (1a)

CHRONOMETRE

Exercice: déterminer une limite

Donner la limite des suites suivantes ($+\infty$ se notera "+inf" et $-\infty$ se notera "-inf"):

1) $\lim_{n \to +\infty} -2 \times 6^n - 3 =$

2) $\lim_{n \to +\infty} 2 \times 0.4^n - 4 =$

3) $\lim_{n \to +\infty} 8\sqrt{n} =$

4) $\lim_{n \to +\infty} -5 \times 0.6^n =$

SUITES_LIMITES_SANS_FI1

Limites de suites, sans F.I. (1)

CHRONOMETRE

Exercice: déterminer une limite

Donner la limite des suites suivantes ($+\infty$ se notera "+inf" et $-\infty$ se notera "-inf"):

1) $\lim_{n\to+\infty} 2\times 7^n - 5 =$

2) $\lim_{n\to+\infty} -2\sqrt{n} =$

3) $\lim_{n\to+\infty} -2\times 0.9^n + 3 =$

4) $\lim_{n\to+\infty} 2\times 0.7^n =$

SUITES_LIMITES_SANS_FI2

Limites de suites, sans F.I. (2)

CHRONOMETRE

Exercice: déterminer une limite

Donner la limite des suites suivantes ($+\infty$ se notera "+inf" et $-\infty$ se notera "-inf"):

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{14}{\sqrt{n}} + 14 =$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5 - \dfrac{1}{n}\right)\sqrt{n} =$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{13 - \dfrac{1}{n}}{\sqrt{n}} - 1 =$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{14 + \dfrac{1}{n}} + 12 =$

⑥ Majoration, Minoration

Propriété Inégalités et limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

On suppose qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$u_n \leqslant v_n.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

$\lim u_n = \ell_0$

$\lim v_n = \ell_1$

$\ell_0 \leq \ell_1$

Propriété **Inégalités et limites**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

On suppose qu'il existe un entier naturel n_0,

tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$u_n \leqslant v_n.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

$\ell_0 \leq \ell_1$

$\lim u_n = \ell_0$

$\lim v_n = \ell_1$

Définition **Suite majorée, minorée, bornée**

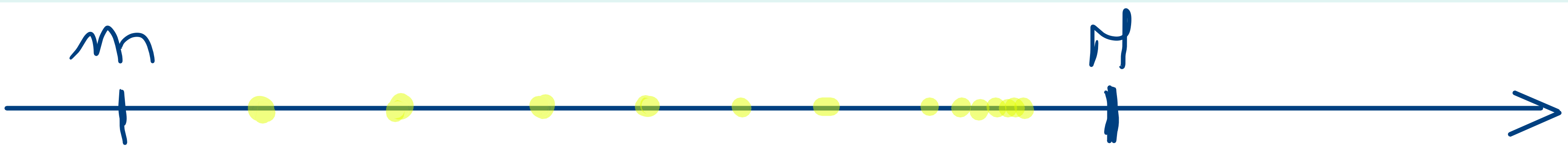
Soit (u_n) une suite définie à partir du rang k.

- On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geqslant k$, $u_n \leqslant M$.
- On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \geqslant k$, $u_n \geqslant m$.
- On dit que (u_n) est **bornée** si (u_n) est **majorée et minorée.**

Définition Suite majorée, minorée, bornée

Soit (u_n) une suite définie à partir du rang k.

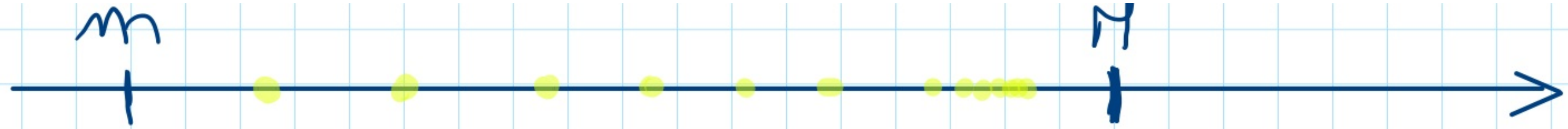
- On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geqslant k$, $u_n \leqslant M$.
- On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \geqslant k$, $u_n \geqslant m$. $(m \leq u_n)$
- On dit que (u_n) est **bornée** si (u_n) est **majorée et minorée.** $m \leq u_n \leq M$



Exemple

$u_n = (-1)^n$, est bornée car minorée par -1 et majorée par 1

$-1 \leq u_n \leq 1$



$u_n=(-1)^n$, est bornée car minorée par -1 et majorée par 1

$-1 \leq u_n \leq 1$

Propriétés Convergence d'une suite monotone

① Toute suite croissante majorée converge.

③ Toute suite décroissante minorée converge.

② Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

④ Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Propriétés Convergence d'une suite monotone

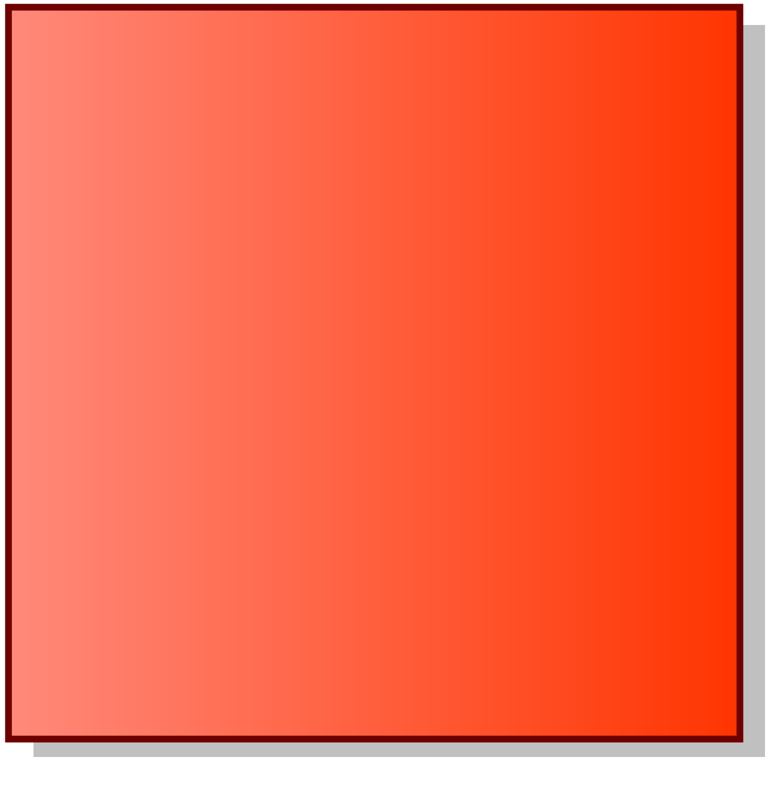
① Toute suite croissante majorée converge.

③ Toute suite décroissante minorée converge.

② Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

④ Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

A voir pour le DS1



Propriété Somme des n premiers entiers

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1+2+\ldots+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

Preuve par récurrence

1° Pour n entier tel que $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

on pose $P(n)$: $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2° Initialisation

Pour $n=1$, $P(1)$: " $1 = \dfrac{1\times(1+1)}{2}$ "

$P(1)$: " $1 = 1$ ", $P(1)$ vraie

3° Hérédité On suppose $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné

$1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$1+2+\ldots+n+(n+1) =$

$\mathcal{P}(1)$: " $1 = 1$ ", $\mathcal{P}(1)$ vraie

③ <u>Hérédité</u> On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$+(n+1)$ $\qquad$ $+(n+1)$

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)^{\times 2}}{1_{\times 2}}$$

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)+(n+1)\times 2}{2}$$

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

④ Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

Propriété Somme de n premières puissances Par récurrence

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$\mathcal{P}(n)$: " $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ "

2° $\mathcal{P}(1)$: " $1+q = \dfrac{1-q^{1+1}}{1-q}$ "

calcul formel

$\Leftrightarrow$ " $1+q = \dfrac{1-q^2}{1-q}$ " $\to \dfrac{(1+q)\cancel{(1-q)}}{\cancel{(1-q)}}$

$\times(1-q)$ $\times(1-q)$

$\Leftrightarrow$ " $(1+q)(1-q) = 1-q^2$ " car $1-q \neq 0$

C'est une identité remarquable donc " $(1+q)(1-q)=1-q^2$ " vraie

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

② Initialisation

$\mathcal{P}(1)$: " $1+q = \dfrac{1-q^{1+1}}{1-q}$ "

$\Longleftrightarrow$ " $1+q = \dfrac{1-q^2}{1-q}$ " $\rightarrow \dfrac{(1+q)\cancel{(1-q)}}{\cancel{(1-q)}}$

$\times(1-q)$ $\times(1-q)$

$\Longleftrightarrow$ " $(1+q)(1-q) = 1-q^2$ " car $1-q \neq 0$

c'est une identité remarquable donc " $(1+q)(1-q) = 1-q^2$ " vraie $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

③ Hérédité On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour une valeur de n donnée

$\Leftrightarrow$ "$(1+q)(1-q) = 1-q^2$" car $1-q \neq 0$

c'est une identité remarquable donc "$(1+q)(1-q) = 1-q^2$" vraie $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Donc $P(1)$ vraie

3° __Hérédité__ On suppose $P(n)$ vraie pour une valeur de n donnée

__Analyse__

$$1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$1+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q}$$

3° **Hérédité** On suppose $P(n)$ vraie pour une valeur de n donnée

Analyse

$$1+\dots+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1+1}}{1-q}$$

$$1+\dots q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$+q^{n+1} \qquad + q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{q^{n+1}\times(1-q)}{1\times(1-q)}$$

Analyse

$$1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$+q^{n+1} \qquad\qquad + q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1} \times (1-q)}{1 \times (1-q)}$$

$$1+q+q^2+\dots q^n+q^{n+1} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$ donc $P(n+1)$ vraie

$$1+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q}$$

$$1+\dots q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$q^{n+1} \times q^1 = q^{n+2}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$+q^{n+1} \qquad + q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1} \times (1-q)}{1 \times (1-q)}$$

$$1+q+q^2+\dots q^n+q^{n+1} = \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}-q^{n+2}}{1-q}$$

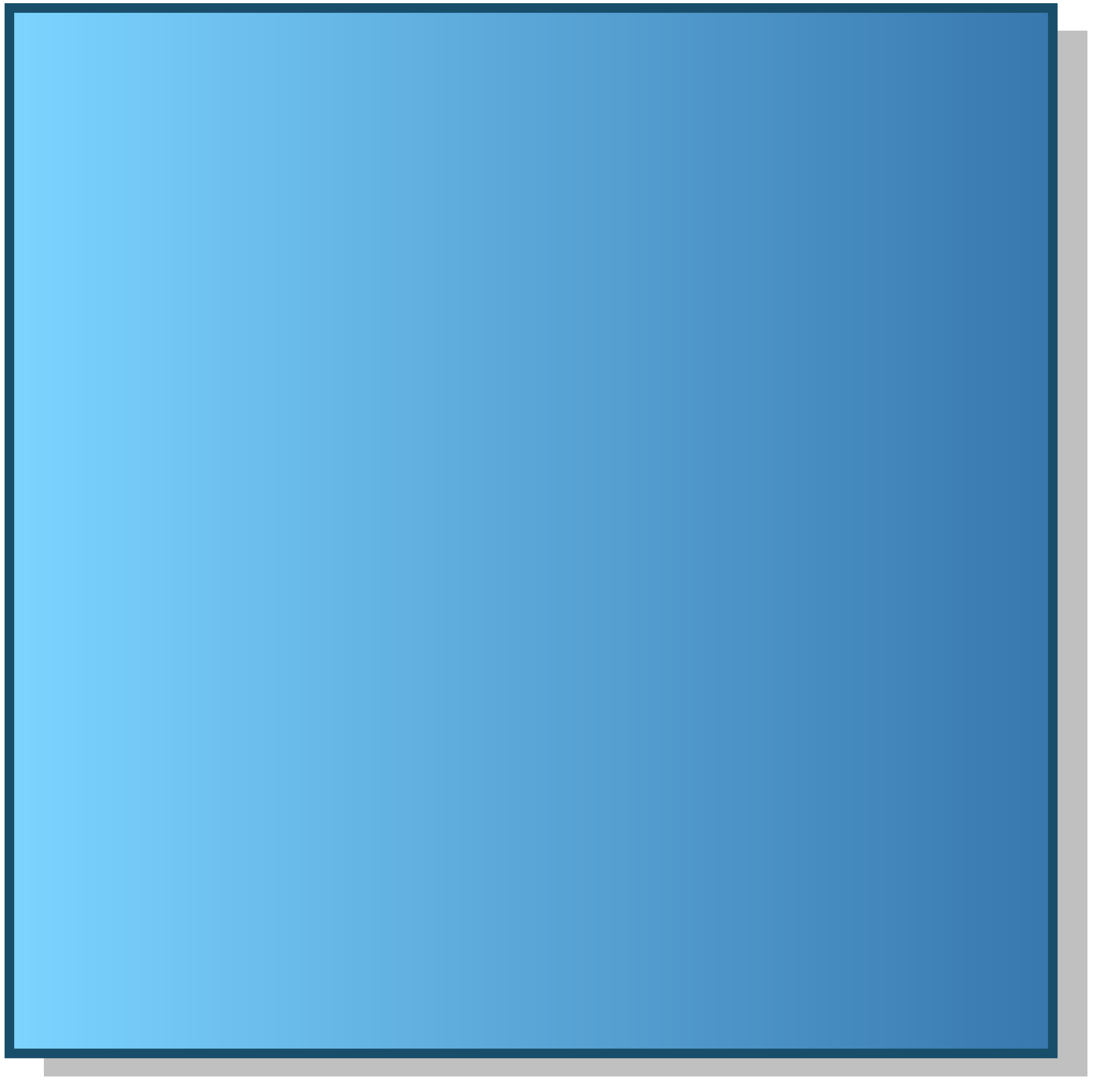
$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad \text{donc } P(n+1) \text{ vraie}$$

$$1+\dots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q}$$

$$1+\dots q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$q^{n+1} \times q^1 = q^{n+2}$$

4° D'après le principe de récurrence $P(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$



Somme des carrés

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somme des cubes

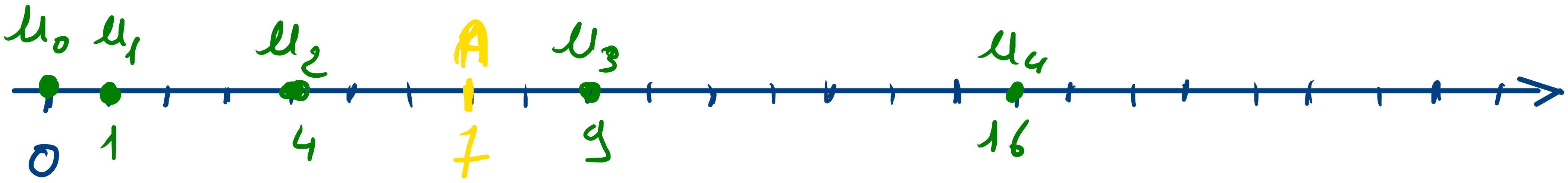
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ → vidéo

RECURRENCE_DRAG_AND_DROP1.html
RECURRENCE_DRAG_AND_DROP2.html

Exemple $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$+\infty$



$u_n = n^2$

Soit $A > 0$

Soit n_0 le premier entier qui suit $\sqrt{A}$

donc $n_0 > \sqrt{A}$

$u_n \geqslant 7$ à partir de n_0 ?

$\sqrt{7} \to 2{,}65$

3

$u_n \geqslant A$

$n^2 \geqslant A$

$n \geqslant \sqrt{A}$

entier qui suit $\sqrt{A}$, c'est n_0

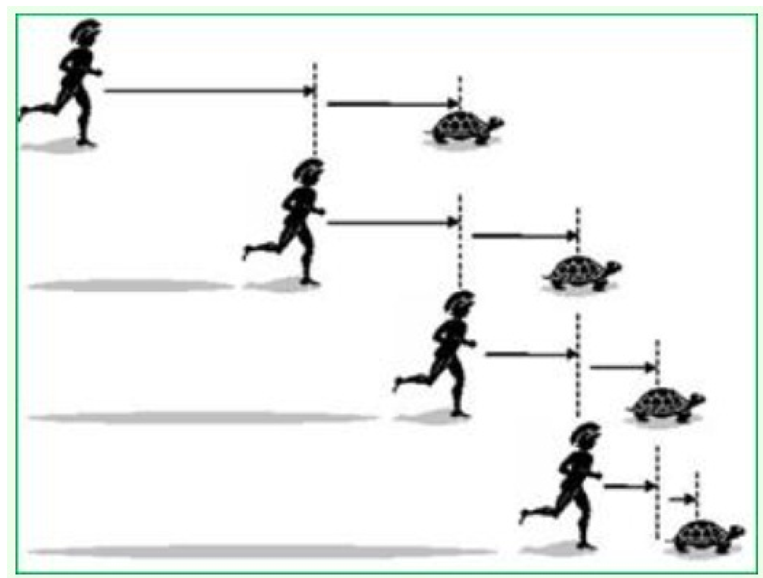
Analyse

Achille se lance dans une course avec une tortue.
Comme il court plus vite que la tortue,
Achille décide de lui laisser de l'avance.

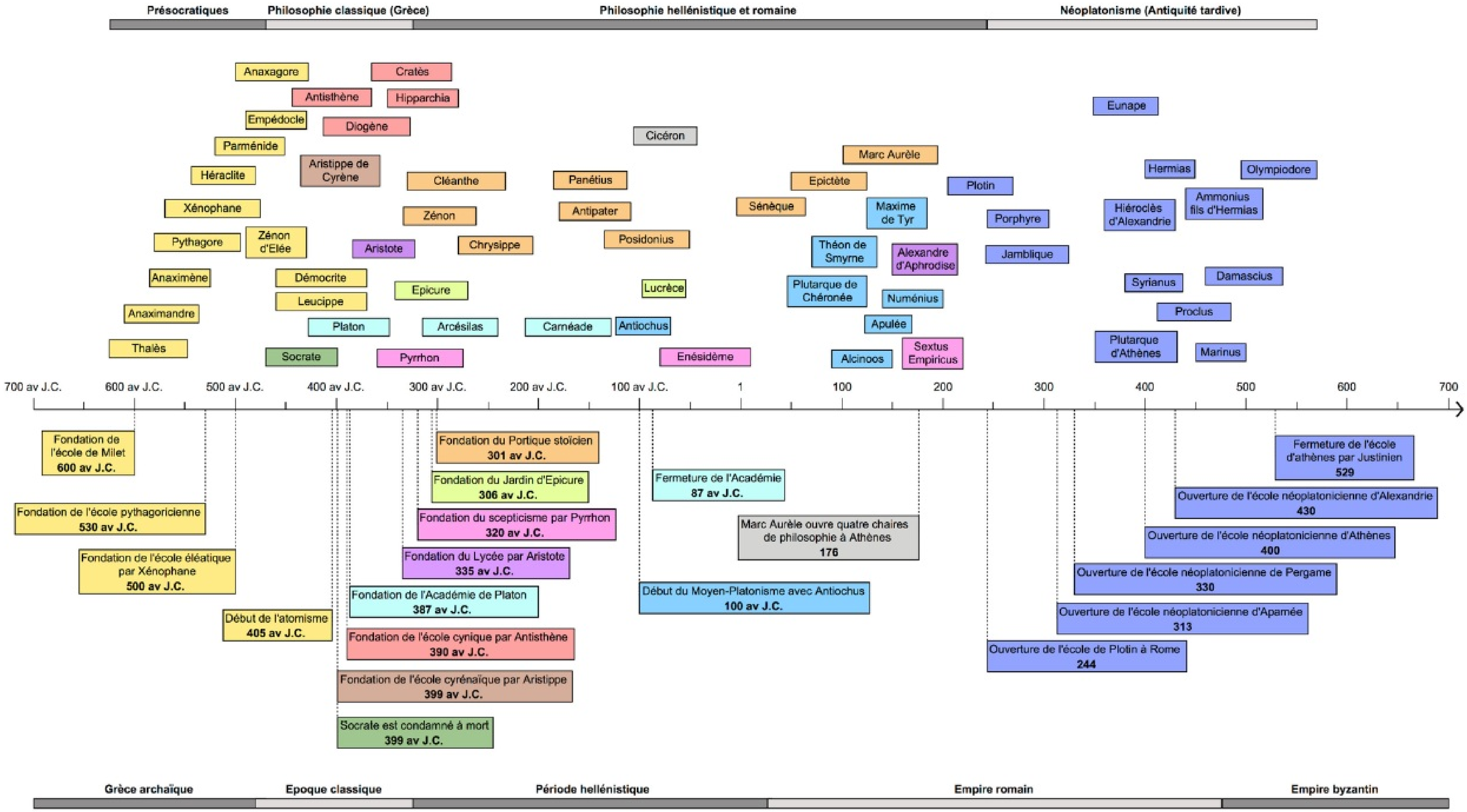
Achille rattrapera-t-il la tortue ? ↪ TP 2 p. 45

Voici l'énoncé du paradoxe de Zénon :

> Un jour, Achille a disputé une course avec une tortue.
> Comme Achille était réputé pour être un coureur très rapide,
> il avait accordé à la tortue une longueur d'avance.
> Bien qu'Achille court plus vite que la tortue, Zénon affirme qu'Achille ne pourra jamais rattraper la tortue.



http://villemin.gerard.free.fr/LogForm/Achille.htm



Présocratiques
Philosophie classique (Grèce)
Philosophie hellénistique et romaine
Néoplatonisme (Antiquité tardive)
Anaxagore
Antisthène
Empédocle
Parménide
Héraclite
Xénophane
Pythagore
Zénon d'Elée
Anaximène
Anaximandre
Thalès
Cratès
Hipparchia
Diogène
Aristippe de Cyrène
Démocrite
Leucippe
Platon
Socrate
Aristote
Cléanthe
Zénon
Chrysippe
Epicure
Arcésilas
Pyrrhon
Panétius
Antipater
Posidonius
Cicéron
Lucrèce
Carnéade
Antiochus
Enésidème
Marc Aurèle
Epictète
Sénèque
Maxime de Tyr
Théon de Smyrne
Alexandre d'Aphrodise
Plutarque de Chéronée
Numénius
Apulée
Alcinoos
Sextus Empiricus
Plotin
Porphyre
Jamblique
Eunape
Hermias
Olympiodore
Hiéroclès d'Alexandrie
Ammonius fils d'Hermias
Syrianus
Damascius
Proclus
Plutarque d'Athènes
Marinus
700 av J.C.
600 av J.C.
500 av J.C.
400 av J.C.
300 av J.C.
200 av J.C.
100 av J.C.
1
100
200
300
400
500
600
700
Fondation de l'école de Milet 600 av J.C.
Fondation de l'école pythagoricienne 530 av J.C.
Fondation de l'école éléatique par Xénophane 500 av J.C.
Début de l'atomisme 405 av J.C.
Fondation du Portique stoïcien 301 av J.C.
Fondation du Jardin d'Epicure 306 av J.C.
Fondation du scepticisme par Pyrrhon 320 av J.C.
Fondation du Lycée par Aristote 335 av J.C.
Fondation de l'Académie de Platon 387 av J.C.
Fondation de l'école cynique par Antisthène 390 av J.C.
Fondation de l'école cyrénaïque par Aristippe 399 av J.C.
Socrate est condamné à mort 399 av J.C.
Fermeture de l'Académie 87 av J.C.
Marc Aurèle ouvre quatre chaires de philosophie à Athènes 176
Début du Moyen-Platonisme avec Antiochus 100 av J.C.
Fermeture de l'école d'athènes par Justinien 529
Ouverture de l'école néoplatonicienne d'Alexandrie 430
Ouverture de l'école néoplatonicienne d'Athènes 400
Ouverture de l'école néoplatonicienne de Pergame 330
Ouverture de l'école néoplatonicienne d'Apamée 313
Ouverture de l'école de Plotin à Rome 244
Grèce archaïque
Epoque classique
Période hellénistique
Empire romain
Empire byzantin

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$(u_n + v_n)$ a pour limite	$(u_n \times v_n)$ a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$ indéterminée si $\ell = 0$
n^2 $+\infty$	n $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
	0^-	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
0	0	indéterminée

Autres types de suites

Exercice 1 : calcul d'un terme d'une suite (Calculatrice conseillée)

	(u_n)
Définition de la suite	$u_0 = -2$, $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = -4u_n + 2u_{n-1}$
Calculs (les résultats seront soit sous forme d'entier, soit sous forme de fraction par exemple "2/3").	le terme de rang 3 de la suite est $u_3=$

$$(u_n)\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -4u_n + 2u_{n-1} \end{cases}$$

$$(u_n)\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -4\,u_n + 2\,u_{n-1} \end{cases}$$

Suite d'ordre 2

$u_0 = -2$

$u_1 = 2$

$$u_2 = -4\,u_1 + 2\,u_0$$

$$= -4 \times 2 + 2 \times (-2)$$

$$= -8 - 4 = -12$$

Exemple concret

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$$

Suite de Fibonacci

$u_0 = 1$

$u_1 = 1$

$u_2 = 2$

$u_3 = 3$

$u_4 = 5$ ...

Exercice 2 : calcul d'un terme d'une suite (Calculatrice conseillée, en mode fraction)

	(t_n)
Définition de la suite	$t_0 = -3$ et $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{3} + \dfrac{1}{n+1}$
Calculs (les résultats seront soit sous forme d'entier, soit sous forme de fraction par exemple "2/3").	le terme de rang 2 de la suite est $t_2 =$

$$(t_n) \begin{cases} t_0 = -3 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n}{3} + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{t_0}{3} + \frac{1}{0+1} = \frac{-3}{3} + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0$$

$0+1$

SUITES_HYBRIDES.html

$$(t_n)\ \begin{cases} t_0 = -3 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n}{3} + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{t_0}{3} + \frac{1}{0+1} = \frac{-3}{3} + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0$$

$0+1$

$$t_2 = \frac{t_1}{3} + \frac{1}{1+1} = \frac{0}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$1+1$

6 Utiliser les suites arithmétiques et géométriques p 23

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$.

a) Déterminer la nature de la suite (u_n), puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

b) Calculer u_{10}.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$.

a) Déterminer la nature de la suite (v_n), puis donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) Calculer v_{10}.

1°) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ "forme générique"

a) $u_{n+1} = u_n + (-3)$

(u_n) est une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 5$

① $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ "forme générique"

a) $u_{n+1} = u_n + (-3)$

(u_n) est une suite arithmétique de raison -3
et de premier terme $u_0 = 5$

D'après le cours $u_n = u_0 + n \times r$

$$\boxed{u_n = 5 + n \times (-3)}$$

b) Calculer u_{10}

$u_{10} = 5 + 10 \times (-3) = 5 - 30 = -25$

(u_n) est une suite arithmétique de raison -3
et de premier terme $u_0 = 5$

D'après le cours $u_n = u_0 + n \times r$

$$\boxed{u_n = 5 + n \times (-3)}$$

b) Calculer u_{10}

$u_{10} = 5 + 10 \times (-3) = 5 - 30 = -25$

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$.

a) Déterminer la nature de la suite (v_n), puis donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) Calculer v_{10}.

6 Utiliser les suites arithmétiques et géométriques

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$.

a) Déterminer la nature de la suite (u_n), puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

b) Calculer u_{10}.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$.

a) Déterminer la nature de la suite (v_n), puis donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) Calculer v_{10}.

2°

a)
$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = 2\,v_n \end{cases}$$

$v_{n+1} = 2\,v_n$, on identifie une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 3$

2°

a) $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$

$v_{n+1} = 2v_n$, on identifie une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 3$

$v_1 \xrightarrow{\times 2} v_2 \xrightarrow{\times 2} v_3 \xrightarrow{\times 2} v_4 \ldots$

D'après le cours

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

$$\boxed{v_n = 3 \times 2^{n-1}}$$

b) $v_{10} = 3 \times 2^9$

Raisonnement par l'absurde

Galilée et la gravité

Inégalité triangulaire

3° Hérédité

On suppose $P(n)$ vraie pour une valeur donnée de $n \in \mathbb{N}$

$$a^n \times a = a^{n+1}$$

Synthèse

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

$$\times (1+a) \qquad \times (1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

(on garde le sens de l'inégalité car $a>0$ donc $1+a>0$)

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2$$

$$\underset{A}{(1+a)^{n+1}} \geq \underset{B}{1+na+a+na^2} \geq \underset{C}{1+na+a}$$

$(na^2 \geq 0)$

Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a$ par transitivité

Analyse

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + na + a$$

$A \geq B \geq C$

alors $A \geq C$

Transitivité

-2) -3

$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$$

(on garde le sens de l'inégalité car $a>0$ donc $1+a > 0$)

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na+na^2$$

$$\underbrace{(1+a)^{n+1}}_{A} \geqslant \underbrace{1+na+a+na^2}_{B} \geqslant \underbrace{1+na+a}_{C}$$

$(na^2 \geqslant 0)$

Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a$ par transitivité

$(1+a) \geqslant 1+na+a$

$A \geqslant B \geqslant C$

alors $A \geqslant C$

Soit $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

Donc $P(n+1)$ vraie.

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2$$

$$\underset{A}{(1+a)^{n+1}} \geqslant \underset{B}{1 + na + a} + na^2 \geqslant \underset{C}{1 + na + a}$$

$(na^2 \geqslant 0)$

$A \geqslant B \geqslant C$

alors $A \geqslant C$

Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + na + a$ par transitivité

Soit $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

4° Conclusion

D'après le principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie

(u_n)
$u_0 = -3$, $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = -4u_n + 3u_{n-1}$
le terme de rang 3 de la suite est $u_3 =$?

Méthode 2 p17

Utiliser la récurrence avec les suites

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 6$.
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$$

Rappel

croissante : $u_{n+1} \geq u_n$ $(u_{n+1} - u_n \geq 0)$

décroissante : $u_{n+1} \leq u_n$ $(u_{n+1} - u_n \leq 0)$

1° Soit $P(n)$: " $u_{n+1} < u_n$ " pour $n \in \mathbb{N}$

2° $P(0)$: " $u_1 < u_0$ ", $u_0 = 2$

$u_1 = 2u_0 - 6 = 2 \times 2 - 6 = -2$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$$

Rappel

croissante : $u_{n+1} \geq u_n$ $(u_{n+1} - u_n \geq 0)$

décroissante : $u_{n+1} \leq u_n$ $(u_{n+1} - u_n \leq 0)$

1° Soit $\mathcal{P}(n)$: " $u_{n+1} < u_n$ " pour $n \in \mathbb{N}$

2° Initialisation

$\mathcal{P}(0)$: " $u_1 < u_0$ ", $u_0 = 2$

$u_1 = 2u_0 - 6 = 2 \times 2 - 6 = -2$

donc $\underset{-2}{u_1} < \underset{2}{u_0}$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

3° Hérédité On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n donné

2° Initialisation

$P(0)$: " $u_1 < u_0$ ", $u_0 = 2$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$$

$u_1 = 2u_0 - 6 = 2\times 2 - 6 = -2$

donc $\underset{-2}{u_1} < \underset{2}{u_0}$ donc $P(0)$ vraie

3° Hérédité On suppose $P(n)$ vraie pour n donné

(Synthèse)

$u_{n+1} < u_n$

$\times 2$ $\times 2$

$2u_{n+1} < 2u_n$

-6 -6

$2u_{n+1} - 6 < 2u_n - 6$

(Analyse)

$u_{n+1+1} < u_{n+1}$

$u_{n+2} < u_{n+1}$

$2u_{n+1} - 6 < 2u_n - 6$

③ **Hérédité** On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n donné

$$u_{n+1} < u_n$$
$$\times 2 \qquad \times 2$$
$$2u_{n+1} < 2u_n$$
$$-6 \qquad -6$$
$$2u_{n+1} - 6 < 2u_n - 6$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 6 \end{cases}$$

$$u_{n+1+1} < u_{n+1}$$
$$u_{n+2} < u_{n+1}$$
$$2u_{n+1} - 6 < 2u_n - 6$$

$u_{n+2} < u_{n+1}$ par définition de (u_n)

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

④ D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n) \searrow$

$(\mathcal{P}(n) : $ " $u_{n+1} < u_n$ "$)$

Exercice

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise $9^n - 1$.

- Posons P_n : " 2 divise $9^n - 1$ "

Montrons par récurrence que P_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** P_0 : " 2 divise $9^0 - 1$ "

$$9^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2 \times 0$$

donc 2 divise $9^0 - 1$

donc $P(0)$ vraie.

Initialisation P_0 : " 2 divise $9^0 - 1$ "

$9^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2 \times 0$

donc 2 divise $9^0 - 1$

donc $P(0)$ vraie.

Hérédité $P(n) \dots \rightarrow P(n+1)$

vraie vraie

Supposons $P(n)$ vraie pour une valeur de $n \in \mathbb{N}$ donnée.

Soit " 2 divise $9^n - 1$ "

Hérédité $\quad \underset{\text{vraie}}{P(n)} \;\dots\rightarrow\; \underset{\text{vraie}}{P(n+1)}$

Supposons $P(n)$ vraie pour une valeur de $n \in \mathbb{N}$ donnée.

Soit " 2 divise $9^n - 1$ "

donc $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $\quad (9^n - 1 = 2 \times k) \times 9$

$$(9^n - 1) \times 9 = 2 \times k \times 9$$

$$\underset{+8}{9^{n+1} - 9} = \underset{+8}{2 \times 9 \times k}$$

$$9^{n+1} - 1 = 2 \times 9 \times k + 8$$

Soit " 2 divise $9^n - 1$ "

donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que

$$(9^n - 1 = 2 \times k) \times 9$$

$$(9^n - 1) \times 9 = 2 \times k \times 9$$

$$9^{n+1} - 9 = 2 \times 9 \times k$$

$$+8 \qquad\qquad +8$$

$$9^{n+1} - 1 = 2 \times 9 \times k + 8$$

$$9^{n+1} - 1 = 2 \times 9 \times k + 2 \times 4$$

$$9^{n+1} - 1 = 2 \times (9k + 4)$$

$\mathcal{P}(n+1)$: 2 divise $9^{n+1} - 1$ ... $\boxed{9^{n+1} - 1 = 2 \times k'}$

donc $9^{n+1} - 1 = 2 \times k'$ avec $k' = 9k + 4$

donc 2 divise $9^{n+1} - 1$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

Exercice type BAC

L'objectif de cet exercice est d'utiliser une suite géométrique pour déterminer l'expression explicite d'une suite qui n'est ni arithmétique, ni géométrique

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{11}{5}u_n - 12 \end{cases}$

(a) Calculer u_1.

$$u_1 = \frac{11}{5}u_0 - 12 = \frac{11}{5} \times 1 - 12 = \frac{11}{5} - \frac{12_{\times 5}}{1_{\times 5}}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{-49}{5}}$$

(b) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 10$.
Calculer v_0.

$$v_0 = u_0 - 10 = 1 - 10 = -9 \qquad \boxed{v_0 = -9}$$

(c) Montrer que (v_n) est géomètrique de raison $\frac{11}{5}$.

$\frac{11}{5}$

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 10$

(la définition de (v_n))

$v_{n+1} = q \times v_n$

objectif :

$v_{n+1} = \frac{11}{5} v_n$

$2a + b$

$2\left(a + \frac{b}{2}\right)$

$v_{n+1} = \frac{11}{5} u_n - 12 - 10$

(la définition de (u_n))

$\begin{cases} u_{n+1} = \ldots \\ u_0 \ldots \end{cases}$

$v_n = u_n - 10$

$v_{n+1} = \frac{11}{5} u_n - 22$

$v_{n+1} = \frac{11}{5} \times \left(u_n - 22 \times \frac{5}{11}\right)$

$v_{n+1} = \frac{11}{5} \left(u_n - 10\right)$

SUITES_MONTRER_GEO

$$v_{n+1} = \frac{11}{5} u_n - 22$$

$$v_{n+1} = \frac{11}{5} \times \left(u_n - 22 \times \frac{5}{11} \right)$$

$$v_{n+1} = \frac{11}{5} (u_n - 10)$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 \ldots \\ u_0 = \ldots \end{cases}$$

$v_n = u_n$

SUITES_MONTRER_GEO

(par définition de v_n)

$$v_{n+1} = \frac{11}{5} v_n$$

C'est bien une suite géométrique.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{11}{5} u_n - 12 \end{cases}$$

$$v_n = u_n - 10.$$

(d) Donner l'expression de (v_n) en fonction de n.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{11}{5}$ et de premier terme $v_0 = -9$.

$v_n = v_0 \times q^n$

D'après le cours $\boxed{v_n = -9 \times \left(\frac{11}{5}\right)^n}$

(e) En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{11}{5}u_n - 12 \end{cases}$$

$$v_n = u_n - 10.$$

On a $v_n = u_n - 10 \iff u_n = v_n + 10$

$\iff \boxed{u_n = -9 \times \left(\frac{11}{5}\right)^n + 10}$

(f) Utiliser la formule précédente pour calculer u_6 à 10^{-2}.

$u_6 = -9 \times \left(\frac{11}{5}\right)^6 + 10 \simeq -1010,42$

2 chiffres après la virgule

• On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]-\infty\,;-A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

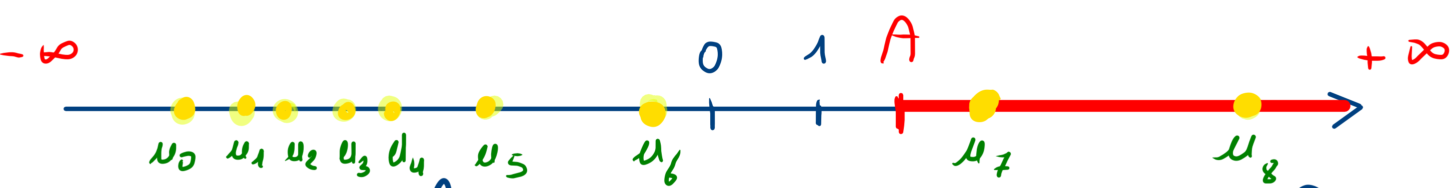
On dit que (u_n) **diverge** et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

SUITES_PROG_GRAPH_COURS

Définition Suite divergeant vers l'infini

- On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **diverge** et on note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$



Exemple Soit (u_n) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 0,5 \end{cases}$

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}5 \end{cases}$$

$u_n = 1 + n \times 0{,}5$

Pour $A > 0$ (quelconque)

Cherchons le rang n_0 à partir duquel tous les u_n sont $> A$

(si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$)

$$u_n > A \iff 1 + n \times 0{,}5 > A$$

$$\iff n \times 0{,}5 > A - 1$$

$$\iff n > \frac{A-1}{0{,}5}$$

$$(u_n)\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 0,5 \end{cases}$$

Pour $\overset{10}{A} > 0$ (quelconque)

$u_n = 1 + n \times 0,5$

Cherchons le rang n_0 à partir duquel tous les u_n sont $> A$

(si $n \geq n_0$ alors $u_n > A$)

$$u_n > A \iff 1 + n \times 0,5 > A$$
$$\iff n \times 0,5 > A - 1$$
$$\iff n > \frac{A-1}{0,5}$$

$n > \frac{10-1}{0,5}$

$n > 18$

Soit n_0 le premier entier naturel supérieur à $\frac{A-1}{0,5}$: si $n \geq n_0$, $u_n > A$

1

$u_{19} = 1 + 19 \times 0,5 = 10,5$

Exemple

Soit $u_n = -2n^2$

Preuve de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Soit A un réel strictement positif

Cherchons le rang n_0 à partir duquel tous les u_n sont $< -A$:

$$u_n < -A \iff -2n^2 < -A \quad \times(-1)$$

$$\iff 2n^2 > A \quad \div 2$$

$$\iff \sqrt{n^2} > \sqrt{\frac{A}{2}}$$

en appliquant $\sqrt{}$ qui est $\nearrow$ sur $[0 ; +\infty[$

$$\iff n > \sqrt{\frac{A}{2}}$$

Soit n_0 le premier entier $> \sqrt{\frac{A}{2}}$, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n < -A$

$A = 100$

$n > \sqrt{\frac{100}{2}}$

$7,07$

$n \geqslant 8$

à partir de u_8, tous les u_n sont < -100.

SUITES_GRAPHIQUE_LIMITE_COURS

$A = 1000$

$n > \sqrt{\dfrac{100}{2}}$

$7{,}07$

$n \geqslant 8$

à partir de u_8, tous les u_n sont < -100

Exercice 1

1) $\frac{5}{n} - 10 = \boxed{}$?

2) $9n - \frac{7}{n} = \boxed{}$?

3) $\frac{5}{n} - 3 = \boxed{}$?

4) $\frac{2}{\sqrt{n}} - 5 = \boxed{-5}$?

5) $\frac{2}{\sqrt{n}} - 3 = \boxed{}$?

① $\lim_{n \to +\infty} \frac{5}{n} - 10 = \text{"} 0 - 10 \text{"}$

$= -10$

par opération sur les limites

② $\lim_{n \to +\infty} \overset{0}{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 5 = \text{"} 0 - 5 \text{"}$

$= -5$

LIMITES_AVEC_SUITES_REFERENCE1

Exercice 2

1) $\dfrac{32}{\dfrac{2}{n}-4} =$ $\boxed{-8}$ Soı

2) $\dfrac{7-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{n^3} =$ $\boxed{0}$ Soı

3) $\dfrac{24+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}-4} =$ $\boxed{-6}$ Soı

4) $\dfrac{-3}{-2n+\dfrac{9}{n}} =$ $\boxed{}$ Soı

5) $\dfrac{8}{n^2+\sqrt{n}} =$ $\boxed{}$ Soı

LIMITES_AVEC_SUITES_REFERENCE2.html
LIMITES_AVEC_SUITES_REFERENCE3.html

1 $\lim \dfrac{32}{\dfrac{2}{n}-4} = "\dfrac{32}{0-4}"$

$= "\dfrac{32}{-4}" = -8$

2 $\lim \dfrac{7-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{n^3} = "\dfrac{7-0}{+\infty}"$

$= "\dfrac{7}{+\infty}"$

$= 0$

3 $\lim \dfrac{24+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}-4} = "\dfrac{24+0}{0-4}"$

$= "\dfrac{24}{-4}" = -6$

b)

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases} \longrightarrow$$ (4u(n)-1)/(u(n)+2)

SUITES_GRAPHIQUE_LIMITE_COURS.html

Preuve complexe

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

3 Propriétés des limites

$\mathbb{N}^*$: $\mathbb{N}$ privé de 0

$\mathbb{N} \setminus \{0\}$

Propriété Limite des suites de référence

Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Les suites $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2 Suite arithmétique

Définition Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + (-0{,}5)$. (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Remarque

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante r.

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n-1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r \times (n-p)$.

3 Suite géométrique

Définition Suite géométrique

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[\times q]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[\times q]{} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow[\times q]{} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$ est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.
- Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times v_n$. Donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = 5$.

Remarques

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Si les termes sont non nuls, on peut aussi chercher à montrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à une constante q.

- La variation relative entre deux termes consécutifs est constante.

Propriété Expression du terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.