EVALUATION DS 3 (1) de MATHEMATIQUES (2 heures) TERM SPE2025

La calculatrice est AUTORISEE

Nom et prénom: ______________________________

Exercice1(4pts)

(a) On considère la suite définie par récurrence: (2 pts)

$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = 0{,}4u_n + 6 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$8 \leqslant u_n \leqslant 12$$

Solution:
On doit donc montrer que la suite (u_n) est bornée avec 8 pour minorant et 12 pour majorant.
Soit $\mathbf{P}_n$ la proposition "$8 \leqslant u_n \leqslant 12$".
INITIALISATION
$\mathbf{P}_0$: "$8 \leqslant u_0 \leqslant 12$" est vrai car $u_0 = 11$.

HÉRÉDITÉ
Supposons $\mathbf{P}_n$ vraie pour une valeur donnée de n.

On a donc $8 \leqslant u_n \leqslant 12$,
soit $3{,}2 \leqslant 0{,}4u_n \leqslant 4{,}8$
(en multipliant les trois membres de l'inégalité par 0,4)
soit $9{,}2 \leqslant 0{,}4u_n + 6 \leqslant 10{,}8$.
(En ajoutant aux trois membres de l'inégalité le nombre 6)
On remarque alors que $8 \leqslant 9{,}2 \leqslant 0.4u_n + 6 \leqslant 10{,}8 \leqslant 12$
Soit par **transitivité** $8 \leqslant 0{,}4u_n + 6 \leqslant 12$,
(Remarque: la propriété de transitivité dit que si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$).
Soit $8 \leqslant u_{n+1} \leqslant 12$ par définition de la suite (u_n)
On en conclut que $\mathbf{P}_{n+1}$ est vraie.

CONCLUSION
D'après le principe de la récurrence, $\mathbf{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

(b) On considère la suite définie par récurrence: (2 pts)

$$\left\{\begin{array}{r} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 0{,}4u_n - 3{,}7 \end{array}\right.$$

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante .

Solution:
Pour montrer qu'une suite (u_n) est décroissante il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Soit $\mathbf{P}_n$ la proposition "$u_{n+1} \leqslant u_n$".
INITIALISATION
$\mathbf{P}_0$: $u_1 \leqslant u_0$.
On connait $u_0 = -2$, calculons u_1:
$u_1 = 0{,}4 \times -2 - 3{,}7 = -4{,}5$.
On a donc $u_1 \leqslant u_0$: $\mathbf{P}_0$ est donc vraie.

HÉRÉDITÉ
Supposons $\mathbf{P}_n$ vraie pour une valeur donnée de n.
On a donc pour cette valeur de n:
$u_{n+1} \leqslant u_n$
Soit $0{,}4 \times u_{n+1} - 3{,}7 \leqslant 0{,}4 \times u_n - 3{,}7$ (**Inégalité 1**)
(En multipliant par 0,4 puis en ajoutant $-3{,}7$)
Par définition de la suite u_n, $u_{n+1} = 0{,}4u_n - 3{,}7$ et donc $u_{n+2} = 0{,}4u_{n+1} - 3{,}7$.
Par conséquent l'inégalité 1 peut s'écrire: $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
Cette inégalité correpond à la proposition $\mathbf{P}_{n+1}$.
$\mathbf{P}_{n+1}$ est donc vraie.

CONCLUSION
D'après le principe de la récurrence, $\mathbf{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n donc la suite (u_n) est décroissante .

Exercice2(5pts)

Calculer chacune des limites suivantes (justification nécéssaire)

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n^2 - 3n$ (1 pts)

Solution:
$4n^2 - 3n = n^2\left(4 - \dfrac{3}{n}\right)$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n^2 - 3n = (+\infty) \times 4 = +\infty$

Nom et prénom: ______________________________

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-3n+3}{n^3-8n+4}$ (1 pts)

Solution:
$$\frac{n^2-3n+3}{n^3-8n+4} = \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\times\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n^3}}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-3n+3}{n^3-8n+4} = 0\times 1 = 0$$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n^2+3n+5}{-4n^2+5n-1}$ (1 pts)

Solution:
$$\frac{8n^2+3n+5}{-4n^2+5n-1} = \frac{n^2}{n^2}\times\frac{8+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{-4+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{8+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{-4+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{8n^2+3n+5}{-4n^2+5n-1} = \frac{8}{-4} = -2$$

(d) Après avoir rappelé la règle permettant le calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(8^n-12^n)$ (2 pts)

Solution:
- Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n-12^n =$ "$(+\infty)-(+\infty)$" donc une forme indéterminée. On va factoriser pour lever l'indétermination.

On obtient: $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n-12^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 12^n\times\left(\dfrac{8^n}{12^n}-1\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} 12^n \times \left[\left(\dfrac{8}{12}\right)^n - 1\right]$

$= (+\infty)\times(0-1) = -\infty$

car ici $0<\dfrac{8}{12}<1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{8}{12}\right)^n = 0$

Exercice3(4pts)

Question de cours: suites arithmétiques.

(a) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_5=\frac{3}{2}$ et de raison $r=-6$. Donner l'expression explicite de u_n. (1 pts)

Solution: $u_n = \frac{3}{2} - 6(n-5)$

(b) (1 pts)

Soit (u_n) la suite dont l'expression explicite est $u_n = \frac{-31}{4} + 9(n+1)$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme u_0 et la raison r.

Solution:
Pour identifier une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, on doit reconnaitre la forme $u_n = u_0 + n \times r$
On a en développant et en simplifiant:
$u_n = \frac{-31}{4} + 9n + 9 \times 1$
$u_n = \frac{5}{4} + 9n.$
Soit $u_n = \frac{5}{4} + n \times 9$
(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{5}{4}$ et de raison $r = 9$.
Remarque: on ne doit pas se contenter de calculer u_0 ou u_1 pour vérifier la formule $u_n = u_0 + r \times n$.

(c) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{7}{4}$ et de raison $r = -9$. Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{23}$. (1 pts)

Solution:
Rappel de cours (première):
$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$

$S = u_0 + u_1 + ... + u_{23}$
$S = (u_0 + 0 \times r) + (u_0 + 1 \times r) + ... + (u_0 + 23 \times r)$
(On a $(23+1)$ termes entre parenthèses)
$S = u_0 \times (23+1) + (0 + 1 + ... + 23) \times r$
$S = \frac{7}{4} \times (23+1) + \dfrac{23 \times (23+1)}{2} \times (-9) = -2442$

(d) (1 pts)

Soit (u_n) la suite dont l'expression explicite pour $n \geqslant 23$ est $u_n = \frac{-319}{2} + 7n$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_{23} = \frac{3}{2}$ et de raison $r = 7$.

Solution:
Pour identifier une suite arithmétique de premier terme u_{23} et de raison r, on doit reconnaitre la forme $u_n = u_{23} + r \times (n-23)$
On a en développant et en simplifiant: $\frac{3}{2} + 7(n-23) = \frac{-319}{2} + 7n = u_n$.
(u_n) est donc bien une suite arithmétique de premier terme $u_{23} = \frac{3}{2}$ et de raison $r = 7$.

Nom et prénom: ____________________

Exercice4(3pts)

Question de cours: suites géométriques.

(a) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_4 = \frac{5}{3}$ et de raison $q = \frac{3}{4}$. (1 pts)
Donner l'expression explicite de v_n.

Solution: $v_n = \frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}$

(b) Soit (w_n) la suite définie pour $n \geqslant 5$ par la formule explicite: (1 pts)
$w_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_5 = \frac{5}{3}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Solution:
Pour identifier une suite géométrique de premier terme w_5 et de raison $\frac{1}{2}$, on doit identifier l'écriture suivante: $w_n = w_5 \times (\frac{1}{2})^{n-5}$
On a alors
$w_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
$w_n = \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$
(w_n) est donc la suite géométrique de premier terme $w_5 = \frac{5}{3}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

(c) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{5}{3}$ et de raison $q = \frac{3}{2}$. (1 pts)
Calculer $S = v_0 + v_1 + ... + v_8$ (On donnera une valeur approchée à 0.01 près.

Solution:
Rappel de cours (première):
$$1 + q^1 + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
Chaque terme de la suite (v_n) se calcule par la formule explicite:
$v_n = v_0 \times q^n = \frac{5}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n}$.
$S = v_0 + v_1 + ... + v_8 = v_0 \times 1 + v_0 \times q + ... + v_0 \times q^8$
$S = v_0 \times (1 + q + q^2 + ... + q^8)$
$$S = \frac{5}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{8+1}}{1 - \frac{3}{2}}$$
$S \approx 124.81$

Exercice5(6pts)

(Récurrence)

Nom et prénom: ________________________________

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$. (2 pts)

Solution: Soit $\mathbb{P}_n$ la proposition "$0 \leqslant u_n \leqslant 4$".
Initialisation:
$u_0 = 4$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 4$.
D'où $\mathbb{P}_0$ vraie.
Hérédité:
Supposons $\mathbb{P}_n$ est vraie pour un entier n donné.
$0 \leqslant u_n \leqslant 4 \Rightarrow 0 + 2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4 + 2$
$\Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{6}$
$\Rightarrow \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{6}$.
Comme $0 < \sqrt{2}$ et $\sqrt{6} < 4$, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, c'est à dire $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion:
D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout n entier naturel.

(b) Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante. (2 pts)

Solution: Soit $\mathbb{P}_\ltimes$ la proposition "$u_{n+1} \leqslant u_n$".
Initialisation:
$u_0 = 4$ et $u_1 = \sqrt{4} \leqslant 5$ donc $u_1 \leqslant u_0$. En conséquence P_0 est vraie.
Hérédité:
Supposons $\mathbb{P}_n$ vraie pour un entier n donné.
On a donc $u_{n+1} \leqslant u_n \Rightarrow u_{n+1} + 2 \leqslant u_n + 2$.
D'après la question précédente u_{n+1} et u_n sont positifs donc $u_{n+1} + 2$ et $u_n + 2$ le sont également.
De plus la fonction racine est strictement croissante d'où
$u_{n+1} + 2 \leqslant u_n + 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1} + 2} \leqslant \sqrt{u_n + 2}$.
Par définition de u_n, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + 2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
d'où $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
$\mathbb{P}_{n+1}$ est donc vraie.
Conclusion:
D'après le principe de récurrence, $\mathbb{P}_n$ est vraie pour tout n entier naturel.

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. (2 pts)

Solution:
La suite (u_n) est minorée par 0 d'après (a) et elle est décroissante. D'après le cours (u_n) est convergente.

Exercice6(8pts)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Solution:
Pour tout entier $n > 0$, posons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\mathcal{P}(n) : 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation
$\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ est vraie.

Hérédité
Supposons que $\mathcal{P}(n) : 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour une valeur donnée de n.

$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

$\Rightarrow 1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n}{2} \times (n+1) + 1 \times (n+1)$

$\Rightarrow 1+2+3+...+n+(n+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1)$ en factorisant par $(n+1)$

$\Rightarrow 1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n+2}{2}(n+1)$

$\Rightarrow 1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion
D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n > 1$.

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	4	5	4	3	6	8	30
Score:							

Fin du devoir.