DS5 (5) de MATHEMATIQUES (TERM SPE)
2025

Nom et prénom: _____

Exercice1(8pts)

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.

La vaccination contre la grippe est possible; elle doit être renouvelée chaque année.

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 50 % de la population est vaccinée ;
- 4 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 25 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

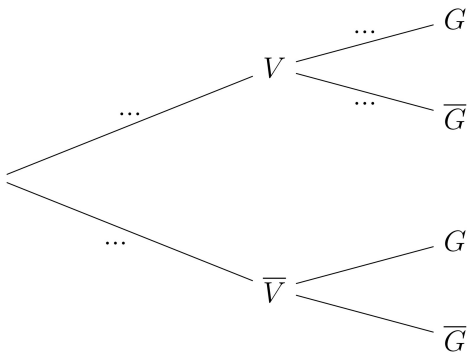
V : la personne est vaccinée contre la grippe;

G : la personne a contracté la grippe

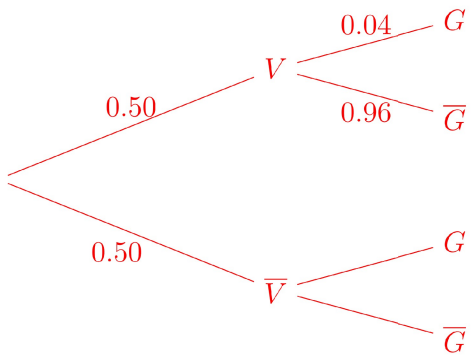
(a) i. Donner la probabilité de l'évènement G. (2 pts)

Solution: $P(G) = 0.25$ car 25% de la population a contracté la grippe.

ii. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches. (2 pts)



Solution:



(b) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée. (2 pts)

Solution: On calcule $P(G \cap V) = P(V) \times P_V(G) = 0.50 \times 0.04 = 0.02$.

(c) La personne choisie n'est pas vaccinée. (2 pts)
Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $\frac{23}{50}$.

Solution: On calcule $P_{\overline{V}}(G)$.
On a $P(G) = P(G \cap V) + P(G \cap \overline{V}) \Leftrightarrow 0.25 = 0.02 + 0.50 \times P_{\overline{V}}(G)$
On pose $x = P_{\overline{V}}(G)$.
On obtient l'équation $0.25 = 0.02 + 0.50 \times x$
$0.25 = 0.02 + 0.50 \times x \Leftrightarrow x = \dfrac{0.25 - 0.02}{0.50} \Leftrightarrow x = \frac{23}{50}$
La probabilité qu'une personne non vaccinée ait contracté la grippe est égale $\frac{23}{50}$.

Exercice2(8pts)

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans une ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale 0.3. On pourra donner les probabilité à 10^{-2} près.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? (2 pts)

Solution: On a une succession de n épreuves de Bernoulli indépendante de paramètre $p = 0.3$ (Schéma de Bernoulli). X suit donc une loi Binomiale.

(b) Dans cette question, on suppose que $n = 12$.

i. Déterminer la probabilité qu'exactement 8 des 12 personnes interrogées soient vaccinées (arrondir à 10^{-5} près). (2 pts)

Solution: $p(X = 8) = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \times 0.3^8 \times (1 - 0.3)^{12-8} = 792 \times 0.3^8 \times 0.7^4 \simeq 0.00780$

ii. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée (Arrondir à 10^{-5} près). (2 pts)

Solution:
Avec la calculatrice, $BinomFrep(n, p, n_0) = P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = n_0)$
Où X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p.
D'où, $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - BinomFrep(12, 0.3, 5) \simeq 0.11785$

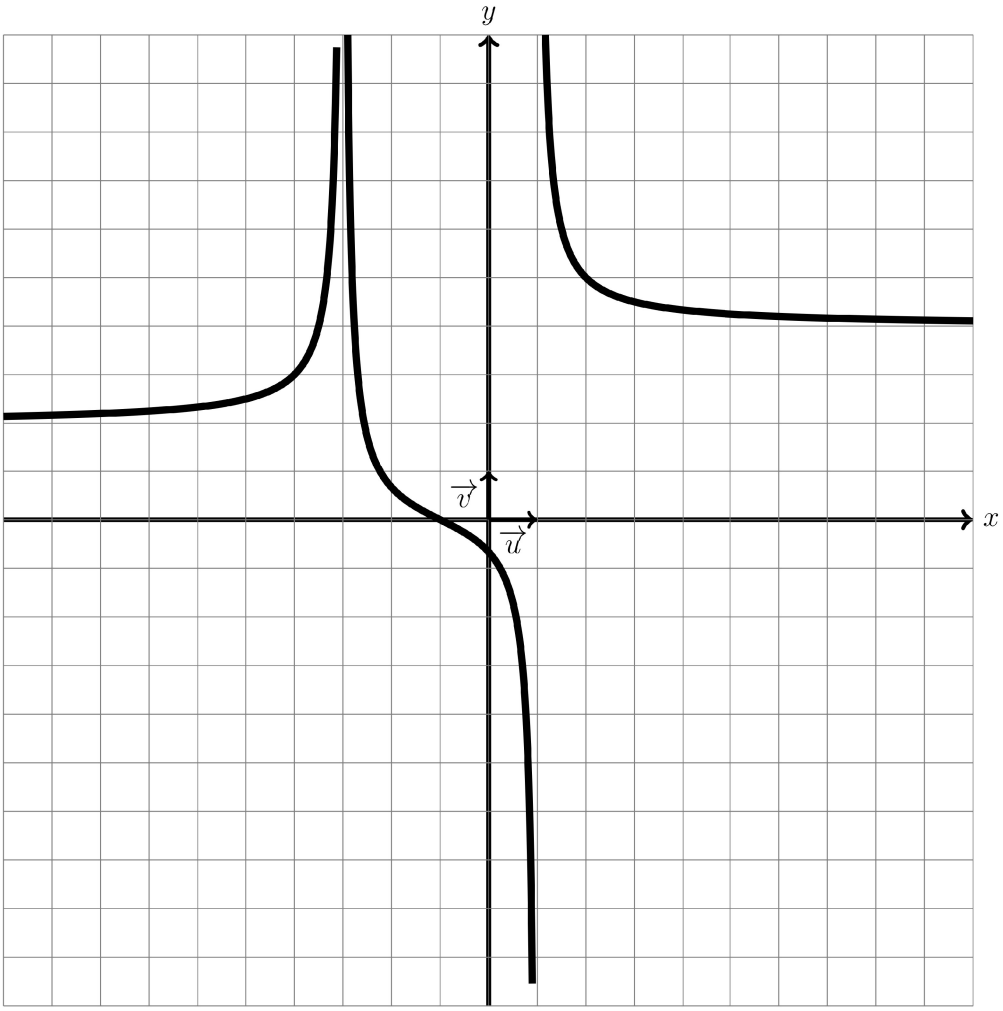
iii. Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X arrondi au millième. (2 pts)

Solution:
D'après le cours, si X suit une loi binomiale de paramètres p et n son espérance est $E(X) = np$ et son écart type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
D'où $E(X) = 12 \times 0.3 = 3.6$
et $\sigma(X) = \sqrt{12 \times 0.3(1 - 0.3)} = \sqrt{2.52} \approx 1.587$

Exercice3(6pts)

Cet exercice a pour objectif l'étude d'une fonction donnée sous forme graphique

Nom et prénom: _____



(a) Dresser le tableau de variation complet de f en y ajoutant le signe de la dérivé de f à partir de conjectures tirées de la représentation graphique de f. (3 pts)

Solution:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de f'(x)		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
Variations de f	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	4

(b) Indiquer le nombre d'asymptotes (horizontales et verticales) à la courbe (3 pts)

représentative de f et donner leurs équations. Justifier votre réponse en donnant les limites correspondantes.

Solution:
Il y a deux asymptotes horizontales:
- $y = 2$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$
- $y = 4$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

Il y a deux asymptotes verticales:

- $x = -3$ car $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$
- $x = 1$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

Exercice4(8pts)

Un sac contient des jetons sur lesquels sont inscrits les lettres suivantes:

- Les consonnes: B C D F
- Les voyelles: A E I

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constituè d'une voyelle **et** d'une consonne.

(a) Un joueur extrait successivement sans remise deux lettres du sac.

i. Déterminer le nombre de tirages possibles. (1 pts)

Solution:
Cette expérience est un tirage sans remise de deux lettres dans l'urne: il y a 7 choix pour la première lettres puis $(7-1)$ choix pour la deuxième lettre:
$7 \times (7-1) = 42$.

ii. Montrer que la probabilité que le joueur gagne ce jeu est égal à $\frac{4}{7}$. (1 pts)

Solution:
- Le nombre d'issues où la première lettre soit une consonne et que

la deuxième soit une voyelle est $4 \times 3 = 12$
• De même le nombre d'issues où la première lettre soit une voyelle et que la deuxième soit une consonne est $3 \times 4 = 12$

Par conséquent, le nombre d'issues favorables est donc égal à $12 \times 2 = 24$.
La probabilité que le joueur gagne ce jeu est égal à $p = \dfrac{24}{42} = \frac{4}{7}$.

Les questions b) et c) de cet exercice sont indépendantes.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est ègale $\frac{4}{7}$.

(b) Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).

i. Déterminer la loi de probabilité de G. (1 pts)

Solution:

G=?	$10-k$	$-k$
P(G=?)	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

ii. Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ? (1 pts)

Solution:
Le jeu est favorable au joueur si son espérance de gain est strictement positive:
$E(G) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(G = x_i) = (10-k) \times \frac{4}{7} + (-k) \times \frac{3}{7}$
$E(G) > 0 \Leftrightarrow (10-k) \times \frac{4}{7} + (-k) \times \frac{3}{7} > 0$
$\Leftrightarrow -k + 10 \times \frac{4}{7} > 0$
$\Leftrightarrow k < 10 \times \frac{4}{7}$
Or $10 \times \frac{4}{7} \approx 5.71429$

La valeur maximale k (qui est entier naturel) de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur est de 5 euros.

(c) Douze joueurs font chacun une partie. Les deux lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.

i. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres. (1 pts)

Solution:
Chaque tirage par chacun des joueurs correspond à une expérience de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{7}$ et indépendantes entre elles.
La succession de 12 tirages correspond à un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X suit donc une loi Binomiale de paramètres $B(12, \frac{4}{7})$

ii. Calculer la probabilité, arrondie 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants. (1 pts)

Solution:
On utilisant la fonction nCr de la calculatrice:
$P(X = 4) = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \times \frac{4}{7}^4 \times \frac{3}{7}^8 = 495 \times \frac{4}{7}^4 \times \frac{3}{7}^8 \approx 0.06$

iii. Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. (1 pts)
Donner une interprétation du résultat obtenu.

Solution:
$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - BinomFrep(12, 4/7, 4) \approx 0.915$
Il s'agit de la probabilité qu'il y ait au moins cinq joueurs gagnant parmi les Douze joueurs.

iv. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) > 0.4$. (1 pts)

Solution:
Sur la calculatrice, avec une table de valeurs
de la suite $u_n = BinomFrep(12, 4/7, n)$, on obtient:

$u_1 = 0.000652720868283639 < 0.4$
$u_2 = 0.005157774704280547 < 0.4$
$u_3 = 0.025180236197600125 < 0.4$
$u_4 = 0.085247620677558912 < 0.4$
$u_5 = 0.213391374234804322 < 0.4$
$u_6 = 0.412726101990519441 > 0.4$
$u_7 = 0.640537219425622454 > 0.4$
$u_8 = 0.830379817288208299 > 0.4$
$u_9 = 0.942879134540111019 > 0.4$
$u_{10} = 0.987878861440872105 > 0.4$
$u_{11} = 0.998787886144086908 > 0.4$
On constate que $P(X \leqslant n) > 0.4$ à partir de $n = 6$

Nom et prénom: _____

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	8	8	6	8	30
Score:					

Fin du devoir.