

CHAPITRE 3

LIMITES DE FONCTIONS

Suites

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n = n^2 + 1 \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times 1}{n(1 + \frac{1}{n})} = 1$$

(F.I.)

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

Fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 1 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

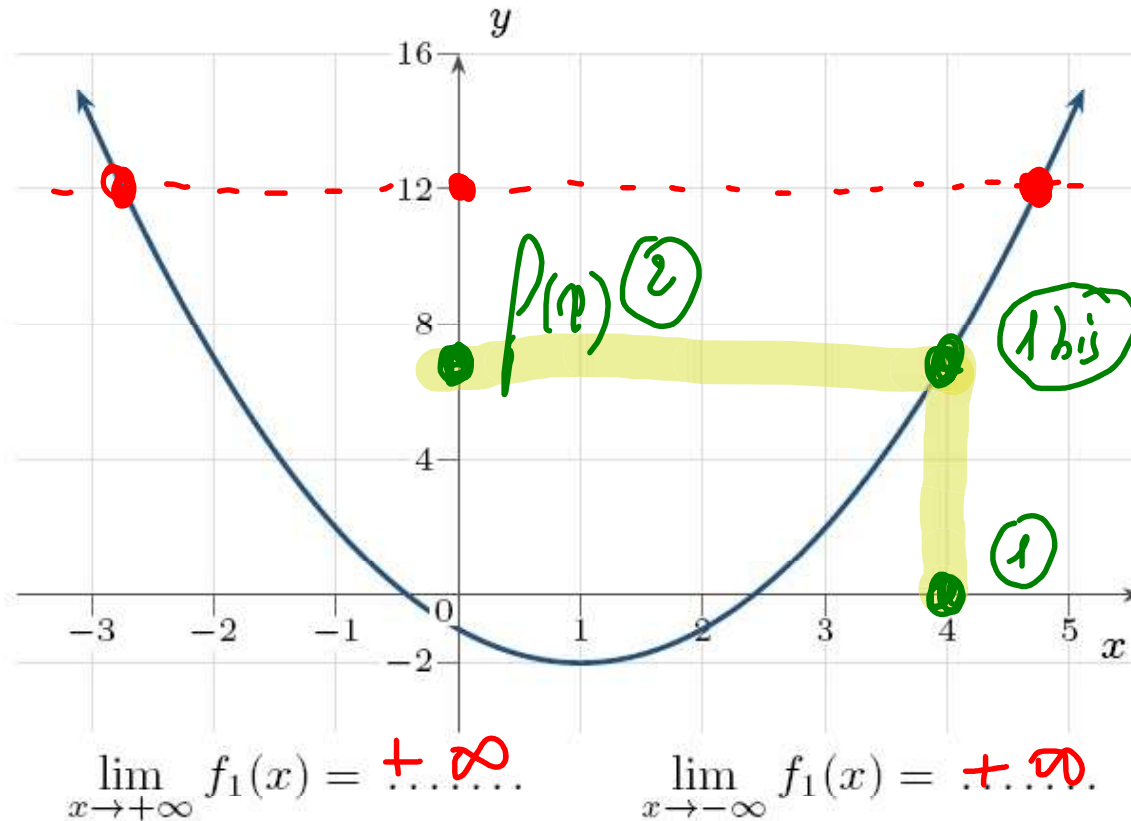
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = ?$$

ion 5

Approche intuitive par représentation graphique

Courbe 1

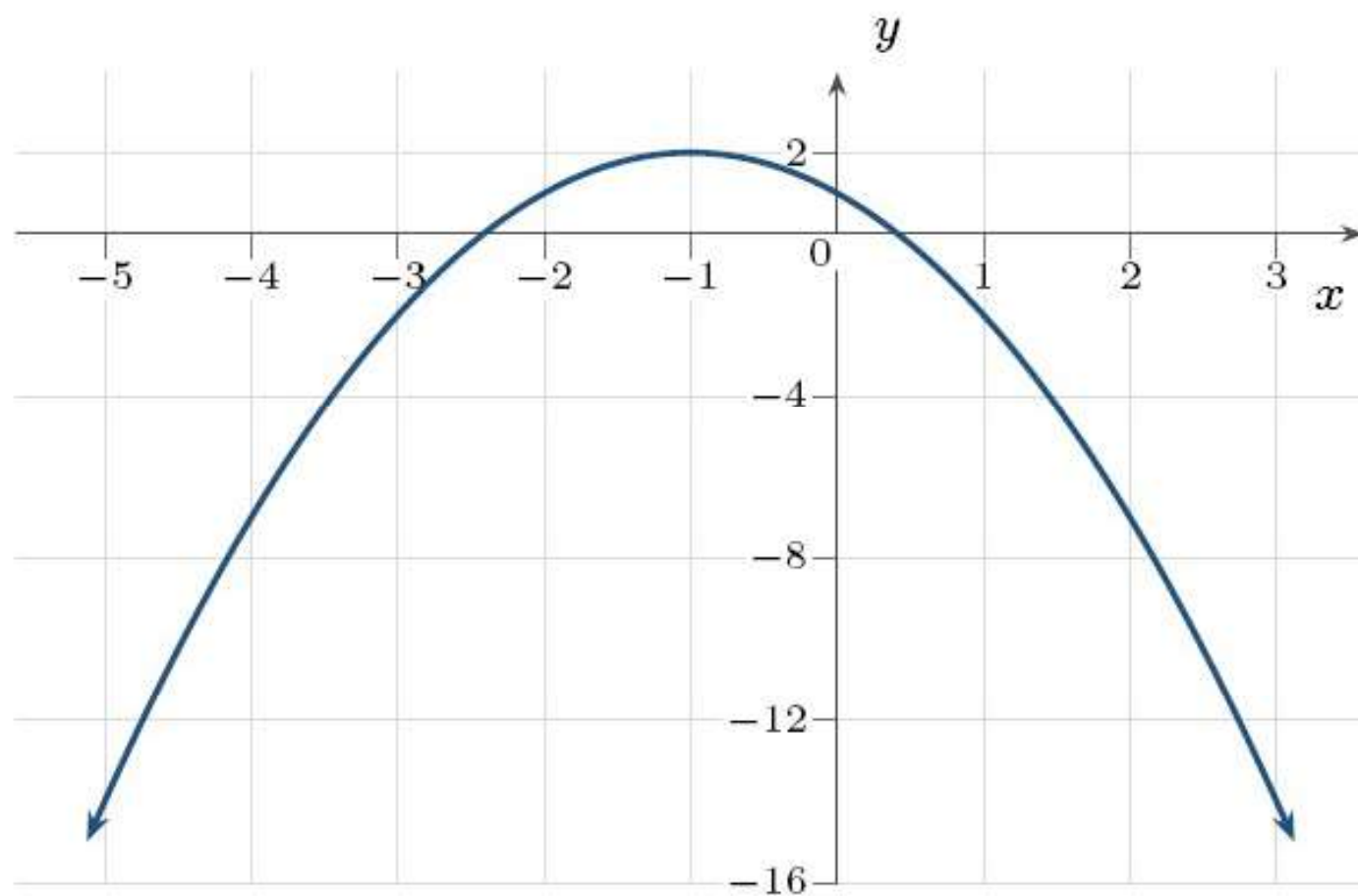
C_{f_1}



① On repère l'évolution
de x demande
" $x \rightarrow \dots$ "
 $x < \dots$

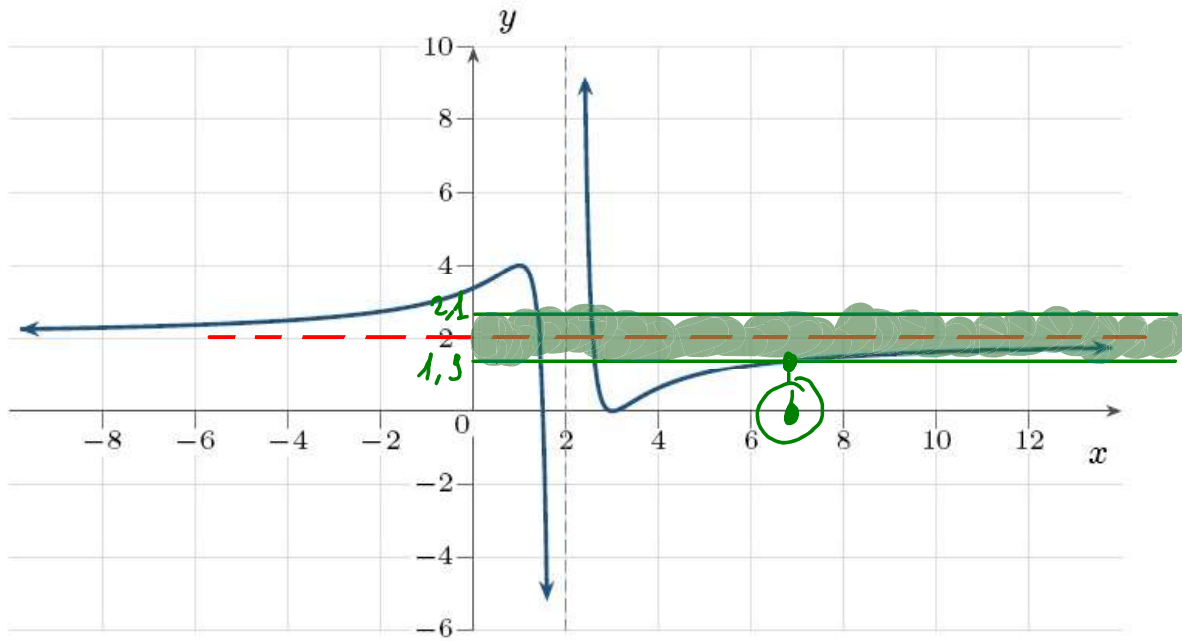
② On observe l'évolution
de l'ordonnée $f(x)$ du
point correspondant de
la courbe $(x; f(x))$

Courbe 2

 $\mathcal{C}_{f_2}$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \text{red } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \text{red } -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \dots 2 \dots$$

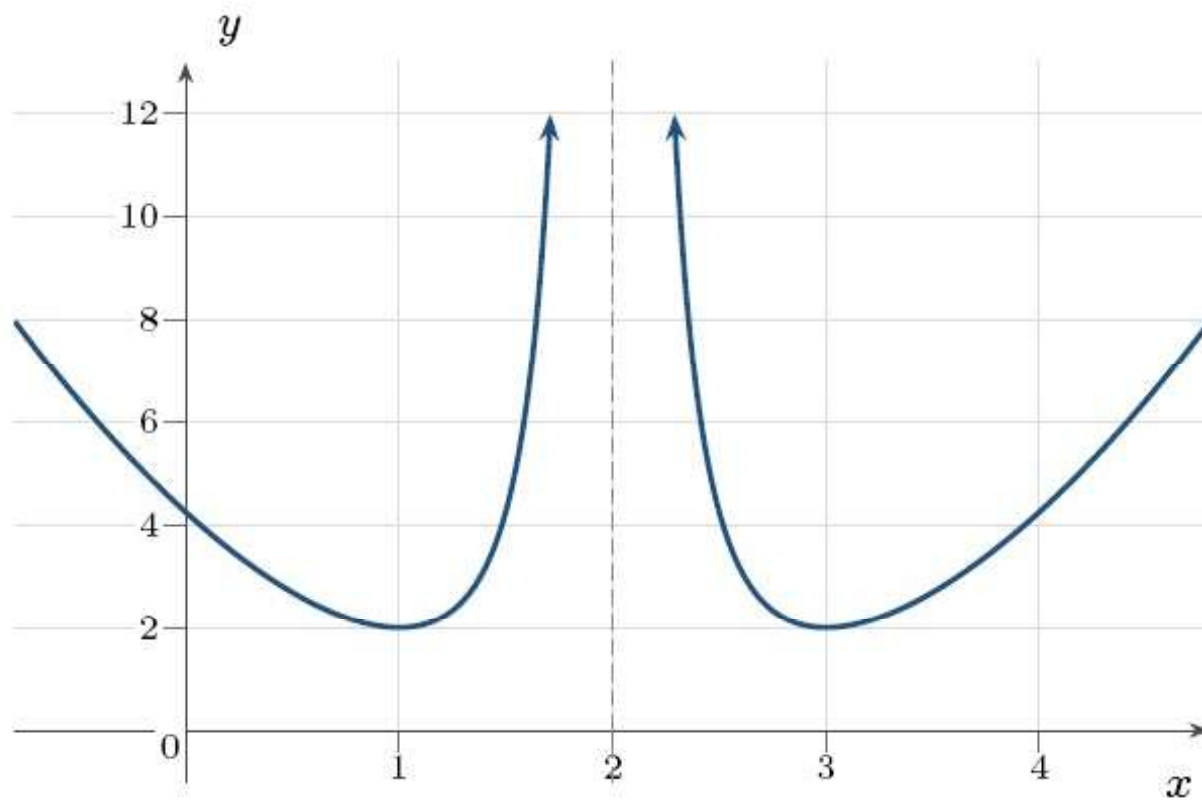
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = \dots 2 \dots$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f_3(x) = \dots -\infty \dots$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f_3(x) = \dots +\infty \dots$$

Courbe 4

C_{f_4}



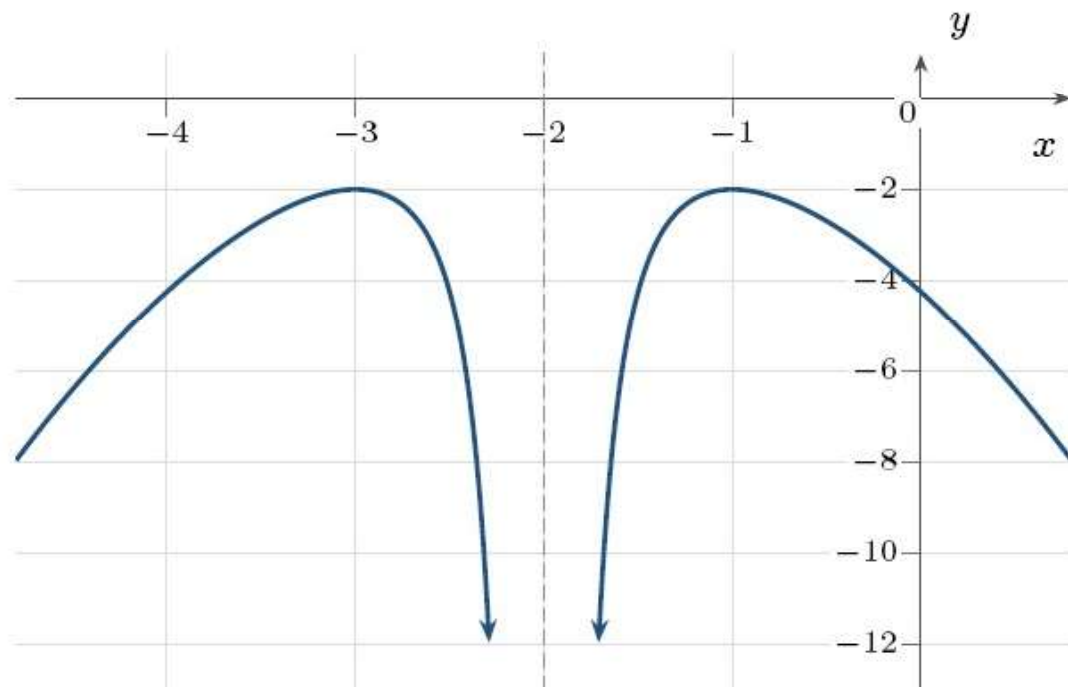
$$\lim_{x \rightarrow 2} f_4(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f_4(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f_4(x) = +\infty$$

Courbe 5

C_{f_5}



$$\lim_{x \rightarrow -2} f_5(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f_5(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f_5(x) = -\infty$$

Remarque (Notation)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f_5(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f_5(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f_5(x)$$

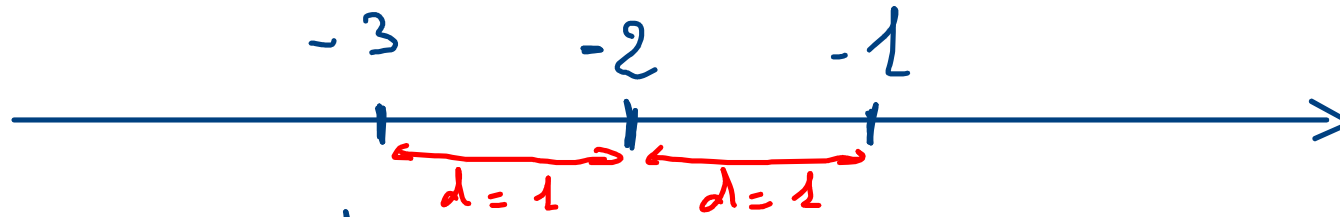
Ne pas utiliser en DS



Trouve une distance $d > 0$ telle que, **pour tout x vérifiant $0 < |x + 2| \leq d$** , on ait $f(x) \leq -9$.

Trouve une distance $d > 0$ telle que, pour tout x vérifiant $0 < |x + 2| \leq d$, on ait $f(x) \leq -9$.

$|x - a|$



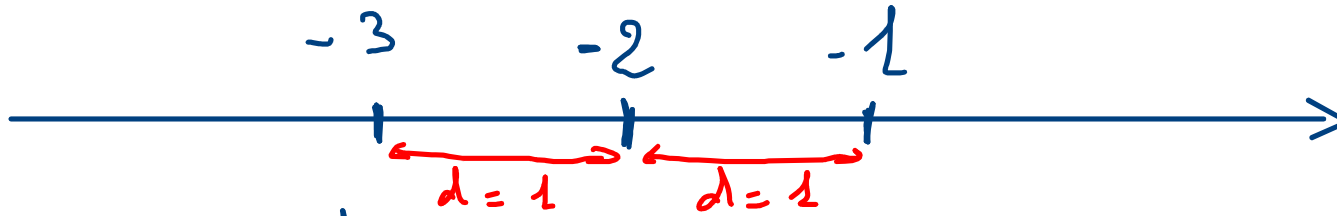
$|x + 2|$ c'est à dire $|x - (-2)|$

est la distance entre x et -2

Par exemple $|x - (-2)| \leq 1 \iff -3 \leq x \leq -1$

Trouve une distance $d > 0$ telle que, pour tout x vérifiant $0 < |x + 2| \leq d$, on ait $f(x) \leq -9$.

$|x - a|$



$|x + 2|$ c'est à dire $|x - (-2)|$

est la distance entre x et -2

Par exemple $|x - (-2)| \leq 1 \iff -3 \leq x \leq -1$

1 Limite d'une fonction en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b ; +\infty]$ (b pouvant ne pas être compris et pouvant être $-\infty$).

Définition Limite infinie

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

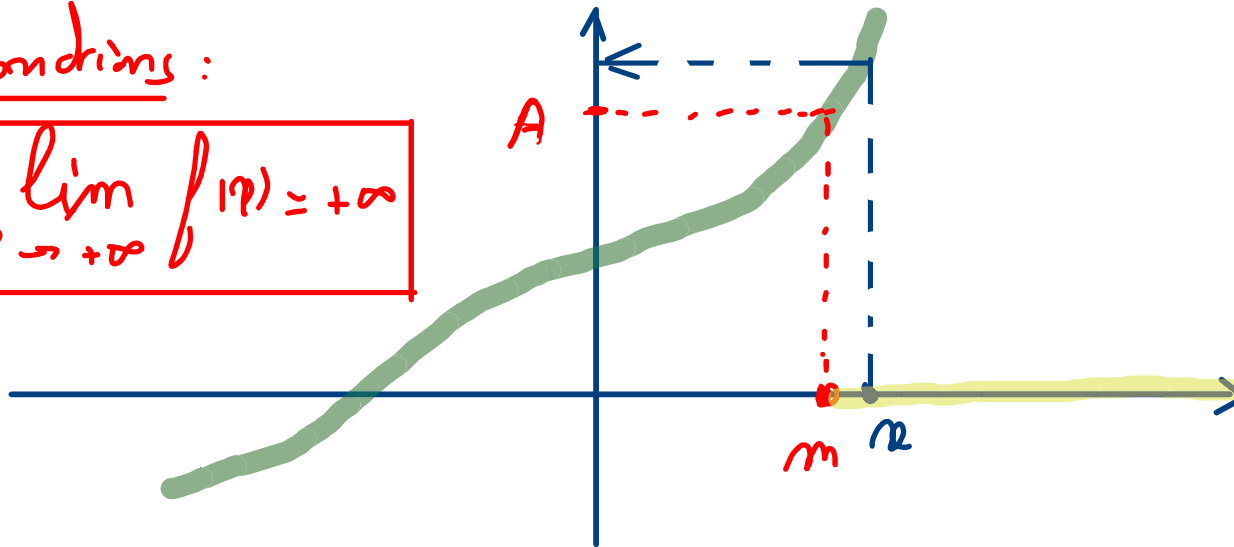
lorsque tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$.

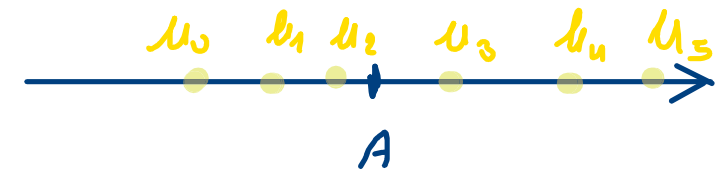
$$A_0 = m$$

Fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Suites :



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

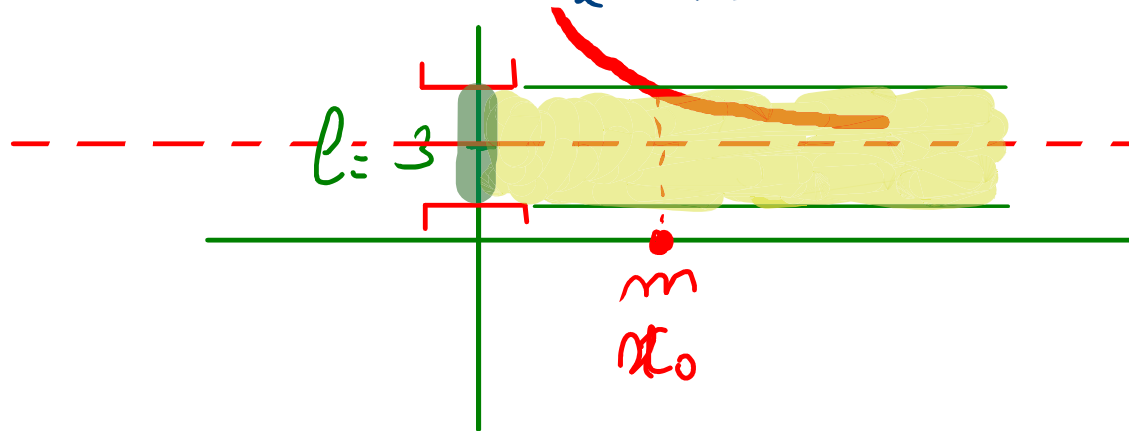
Définitions avec des intervalles

Intervalle ouvert
 $]a; b[$

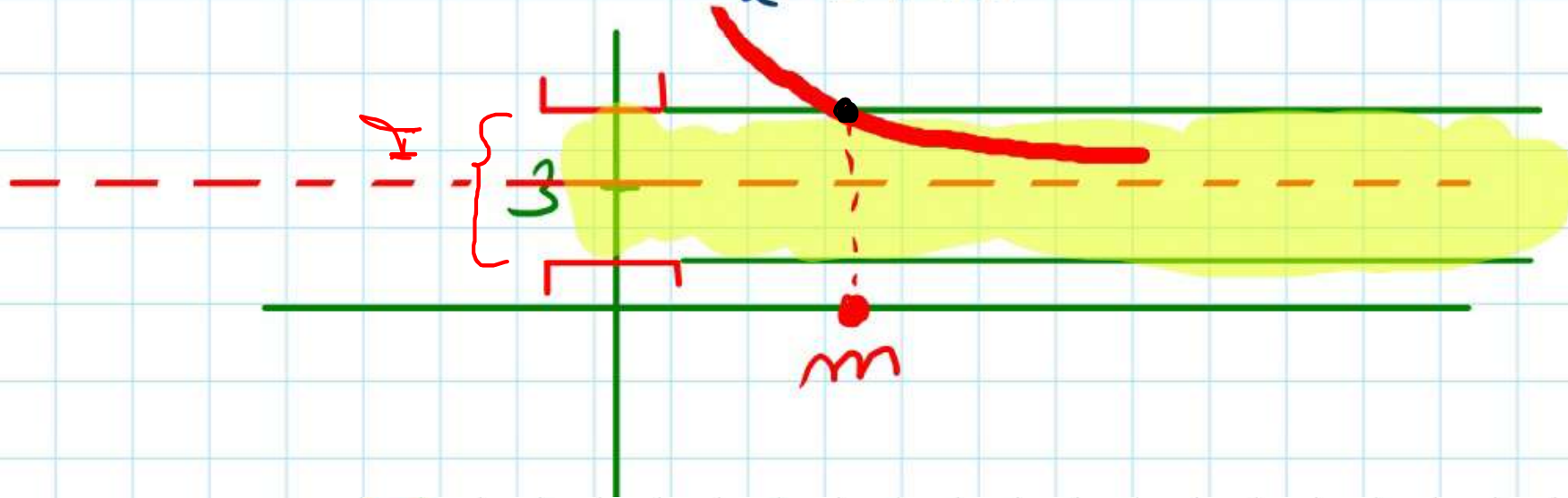
Définition Limite finie en l'infini

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ , quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient $f(x)$ pour x assez grand. C'est-à-dire que pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) \in I$.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right) = 3$



Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right) = 3$ (l)



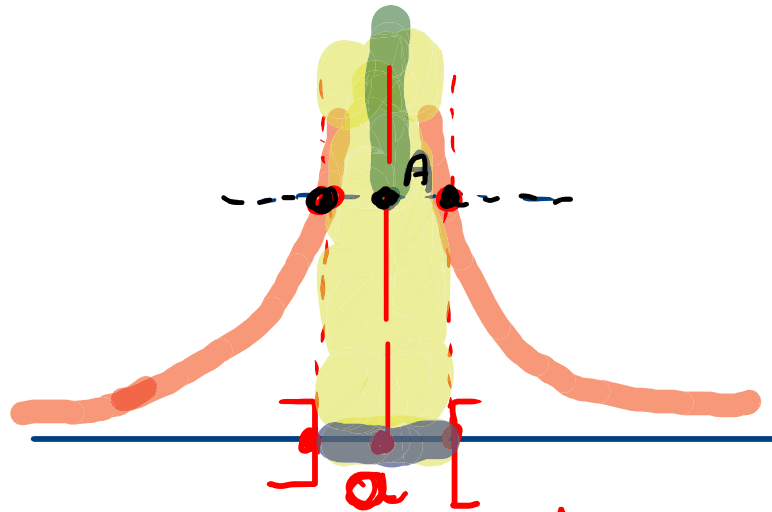
2 Limite d'une fonction en une valeur réelle

Définition Limite infinie

On note $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f

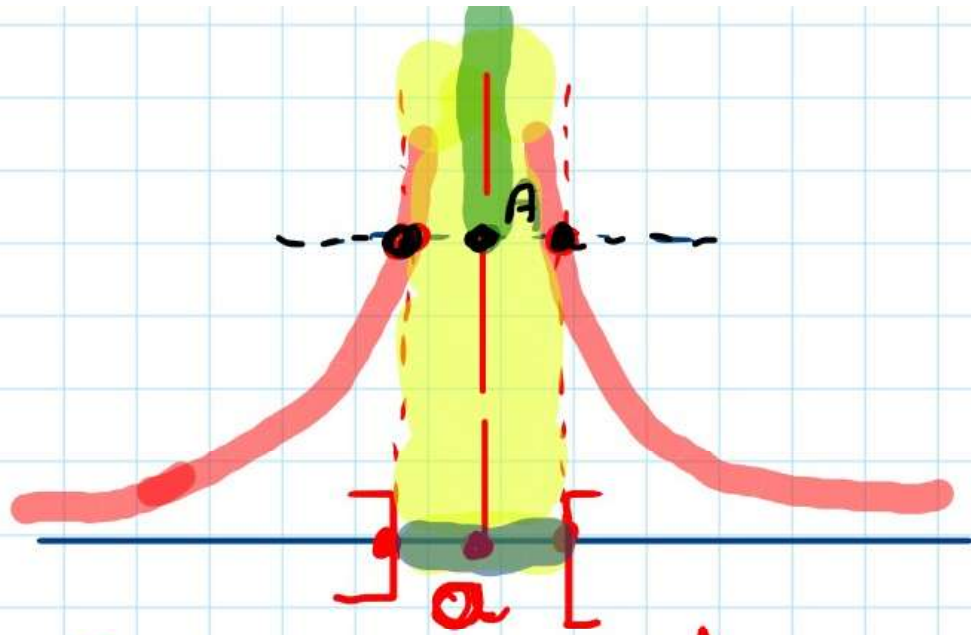
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a dans $\mathcal{D}$. C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in \mathcal{D} \cap I$ alors $f(x) > A$.

$]A; +\infty[$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Dans cet intervalle ouvert, les points de la courbe sont au-dessus de A .



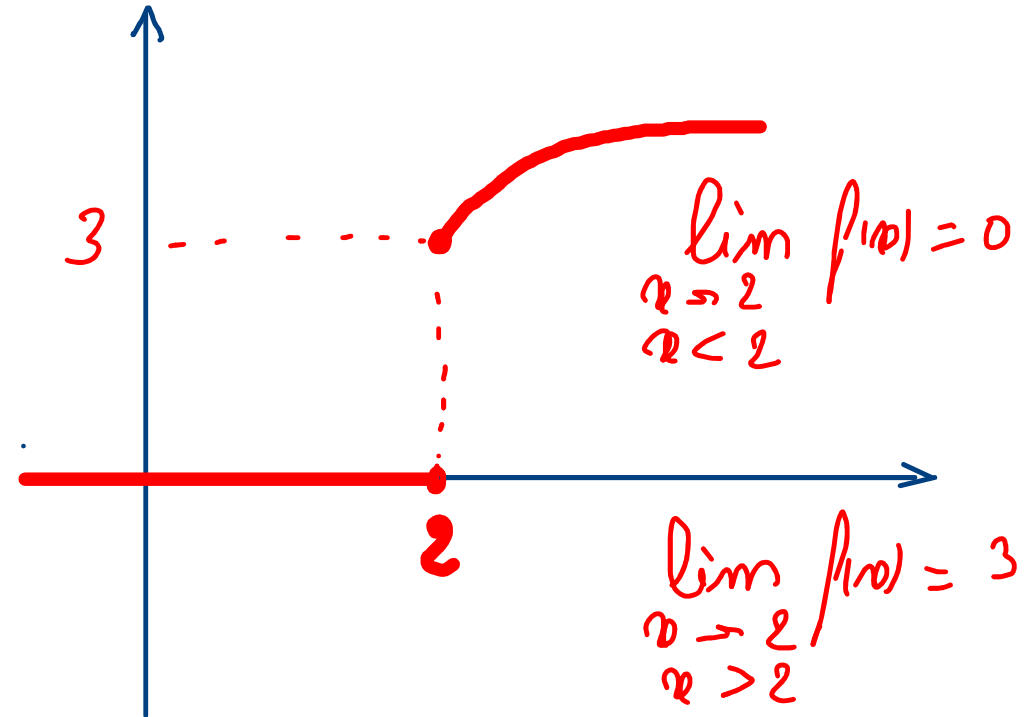
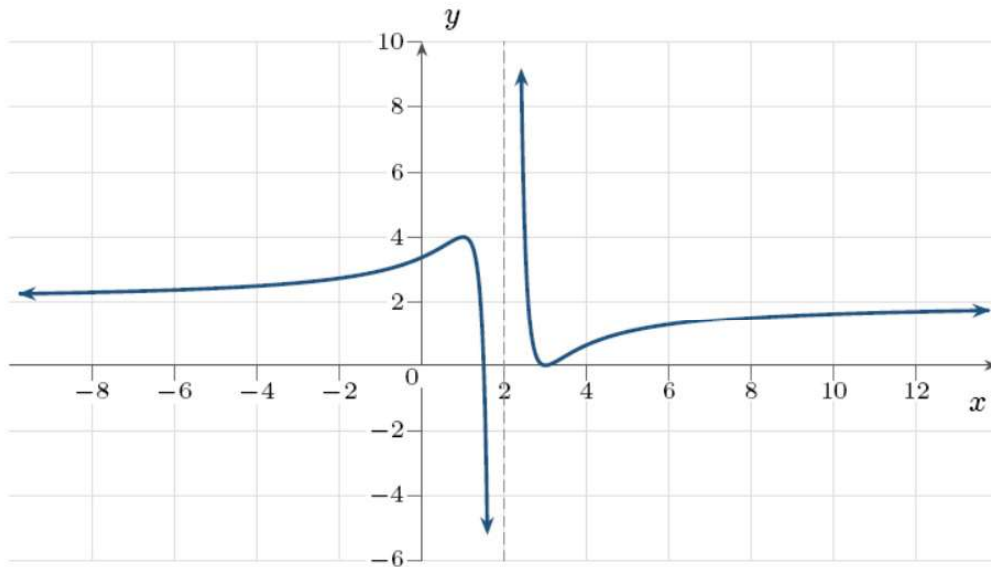
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Dans cet intervalle ouvert, les points de la courbe sont au-dessus de A .

Définition Limite finie ou infinie à gauche ou à droite

- On dit que f admet une limite à gauche de a et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$.
- On dit que f admet une limite à droite de a et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$.

Courbe 3

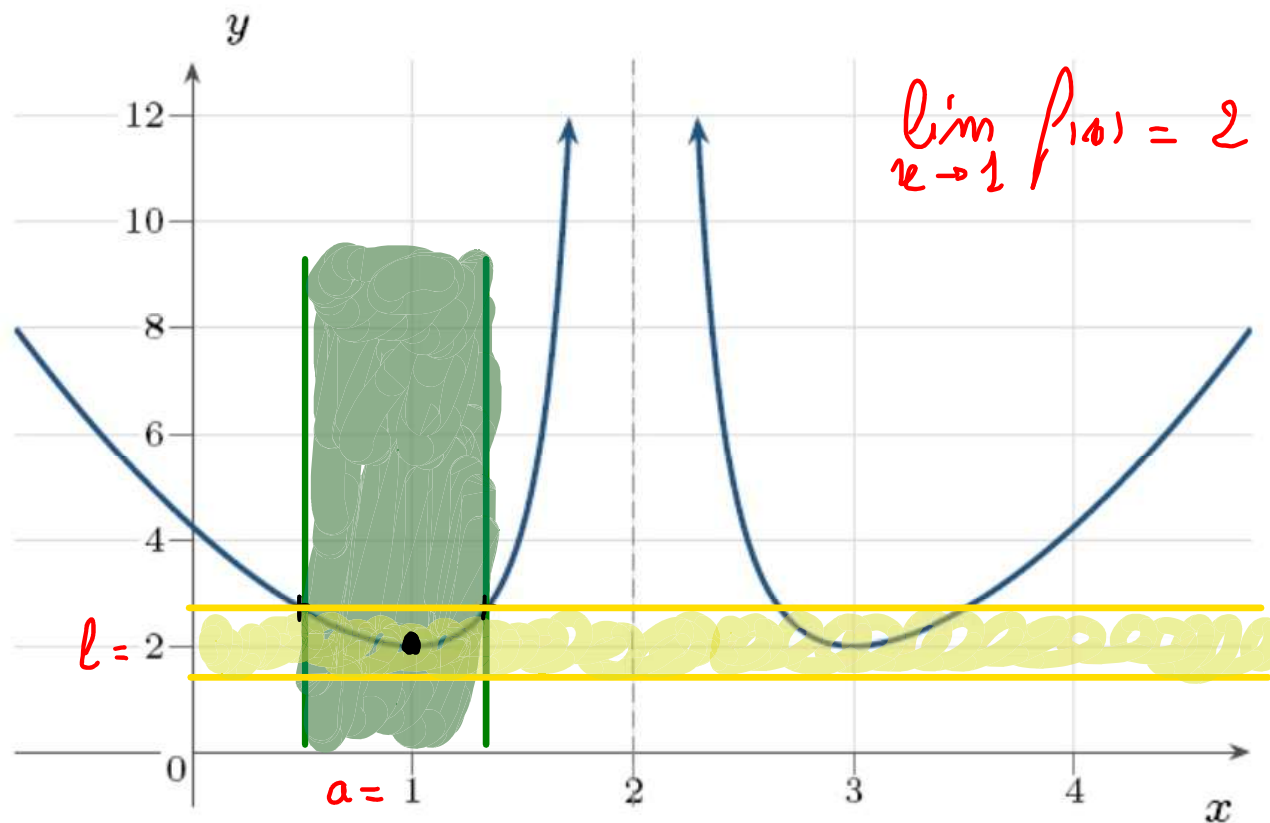


Définition Limite finie

Une fonction f admet une limite ℓ quand x tend vers un réel a lorsque $f(x)$ est aussi proche de ℓ que voulu, pourvu que x soit suffisamment proche de a .

Courbe 4

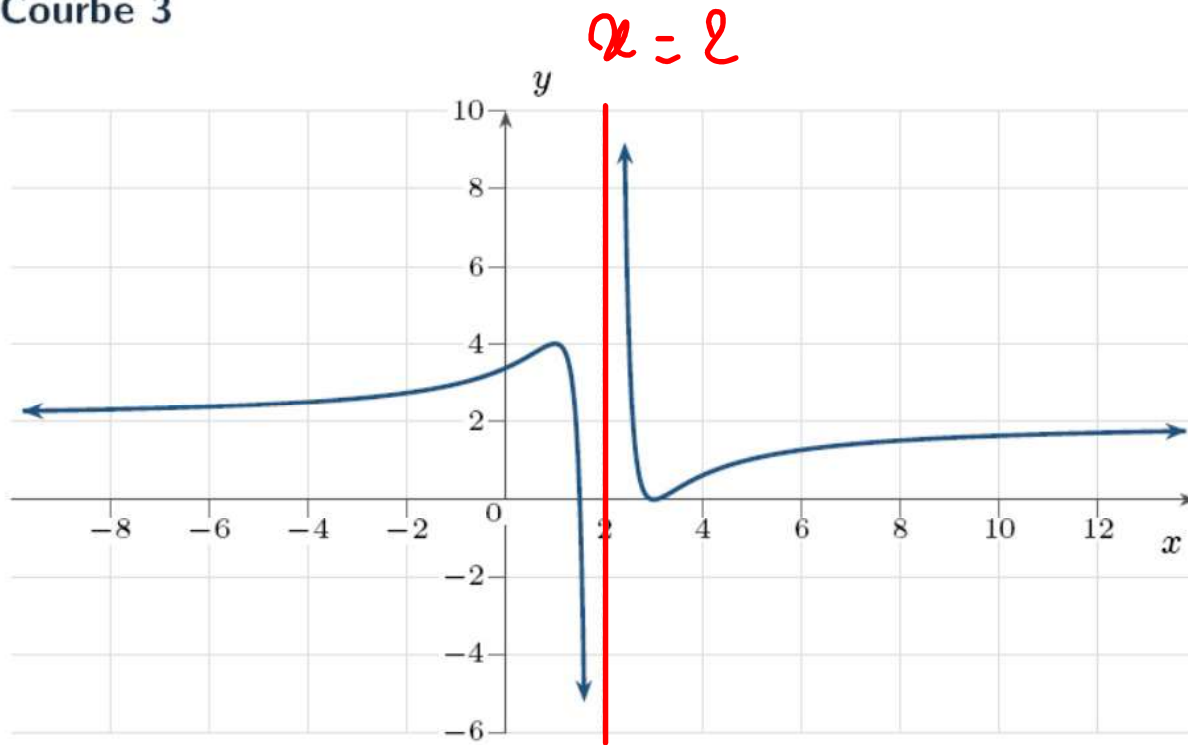
C_{f_4}



Définition Asymptote verticale

Si la limite à gauche ou/et à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est infinie alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f .

Courbe 3



Exemple

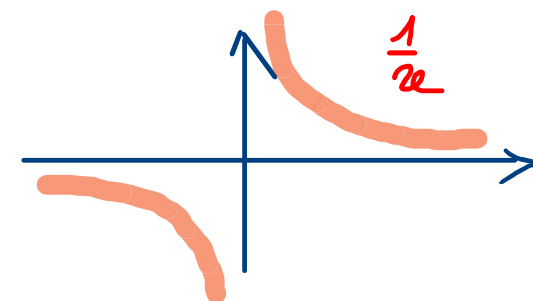
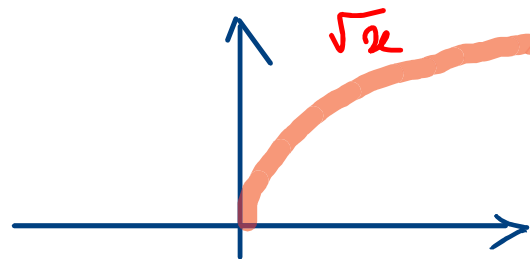
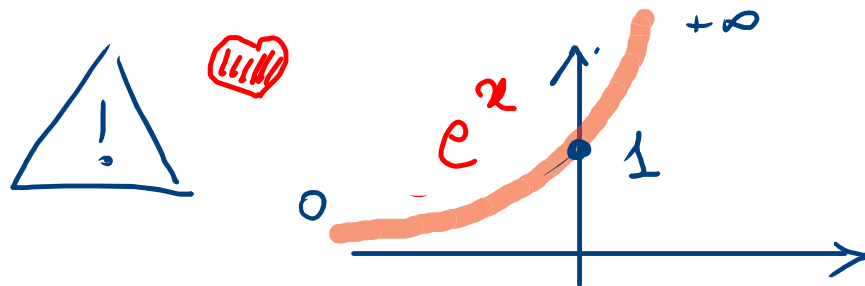
Pour la courbe 3, la
droite d'équation $x = 2$
est asymptote

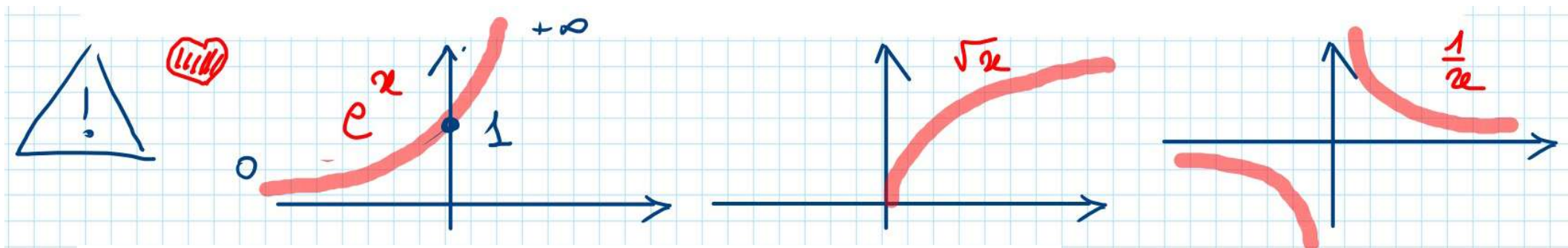
3

Limite des fonctions de référence

Propriétés Limite des fonctions de référence

Fonction inverse	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{\substack{x < 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Fonction puissance	- Pour tout entier naturel n : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ - Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ - Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
Fonction exponentielle	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$





4 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions, on note α une valeur réelle a ou a^+ ou a^- ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	0	indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée

On retiendra les quatre formes indéterminées:

$(+\infty) + (-\infty)$ $(+\infty) - (+\infty) \dots$	$\frac{0}{0}$
$0 \times (\pm \infty)$	$\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

Exercice 1

Compléter le plus rapidement possible les limites suivantes, (l'infini $+\infty$ ou $-\infty$ se noterons respectivement "+inf" et "-inf"):

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^4}{x^6} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{56}{\frac{2}{x} - 7} = -8$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} -7x + \frac{9}{x} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^3} =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - 4 =$$

$$\frac{56}{-7} = -8$$

Exercice 2

Compléter le plus rapidement possible les limites suivantes, (l'infini $+\infty$ ou $-\infty$ se noterons "+inf" ou "-inf"):

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 9x - \frac{4}{x} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{-3x + \frac{1}{x}} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{64 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x} - 8} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{\sqrt{x}} - 8 =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}} - 7 =$$

LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI1
LIMITES_FCT_REFERENCE_INFINI2

Propriétés Limite des fonctions de référence

Fonction inverse	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\bullet \lim_{\substack{x < 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{x} = -\infty$	$\bullet \lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
Fonction puissance	$\bullet$ Pour tout entier naturel n : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\bullet$ Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	$\bullet$ Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	
Fonction exponentielle	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$	$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$	$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$ Règle des signes
0	0	indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée

Exercices

1) $\frac{-\infty}{0^+} = \boxed{-\infty}$ ✓

2) $\frac{+\infty}{0^-} = \boxed{-\infty}$ ✓

3) $\frac{+\infty}{+\infty} = \boxed{FI}$ ✓

4) $(-\infty) + (+\infty) = \boxed{FI}$ ✓

5) $\frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$ ✓

$(+\infty) + (-\infty)$	$\frac{0}{0}$
$0 \times (\pm\infty)$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

6) $\frac{-\infty}{0^-} = \boxed{\text{blue circle}}$ ✓

7) $-2 + (-\infty) = \boxed{\text{blue circle}}$ ✓

8) $\frac{-\infty}{-\infty} = \boxed{\text{blue circle}}$ ✓

9) $\frac{-5}{+\infty} = \boxed{\text{blue circle}}$ ✓

10) $\frac{-\infty}{0^+} = \boxed{\text{blue circle}}$ ✓

$\frac{3}{0^-} = -\infty$

$\frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$

$\frac{10}{0,1}$ $\frac{100}{0,01}$

$$1) \frac{-9}{0^-} = \boxed{+\infty} \checkmark$$

$$2) 5 \times (-\infty) = \boxed{-\infty} \checkmark$$

$$3) \frac{+\infty}{0^+} = \boxed{+\infty} \checkmark$$

$$4) -2 \times (-\infty) = \boxed{+\infty} \checkmark$$

$$5) 4 + (+\infty) = \boxed{+\infty} \checkmark$$

$$6) -6 \times (+\infty) = \boxed{-\infty} \checkmark$$

$$7) (-\infty) \times (-\infty) = \boxed{+\infty} \checkmark$$

$$8) \frac{-\infty}{+\infty} = \boxed{\text{FI}} \checkmark$$

$$9) (+\infty) \times (+\infty) = \boxed{+\infty} \checkmark$$

$$10) -4 + (+\infty) = \boxed{+\infty} \checkmark$$

FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0a.html

FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0b.html

FONCTIONS_LIMITES_CALC_RAPIDE0c.html

Dans les exercices suivant, donner les limites des opérations proposées.
On notera "inf" pour l'infini et "FI" pour forme indéterminée.

1) $(-\infty) + (+\infty) =$ 

2) $\frac{-8}{0^-} =$ 

3) $\frac{0^+}{0^+} =$ 

4) $-4 \times (-\infty) =$ 

5) $\frac{-\infty}{+\infty} =$ 

6) $\frac{0^-}{0^-} =$ 

7) $-7 + (+\infty) =$ 

8) $\frac{+\infty}{0^-} =$ 

9) $\frac{1}{+\infty} =$ 

10) $\frac{+\infty}{-\infty} =$ 